

AVANT-PROPOS

Toute recherche expérimentale implique la mesure d'un nombre plus ou moins grand de grandeurs physiques : de la rigueur avec laquelle sont faites ces mesures, dépend souvent la qualité de la recherche.

Aussi est-il important de posséder des méthodes de mesure aussi sensibles, précises et reproductibles que possible.

Un nombre étendu de grandeurs se mesurent actuellement au moyen de méthodes possédant de telles qualités; toutefois, la mesure de beaucoup d'autres grandeurs ne peut encore se faire qu'avec une précision et une reproductibilité qui laissent à désirer.

La mesure secondaire des pressions est de ce nombre et l'une des raisons en est que la pression elle-même tend à modifier la qualité de l'appareil de mesure, le principe de celui-ci étant presque toujours basé sur la déformation d'un matériau défini, déformation dont la mesure donne la variation de pression recherchée. On conçoit aisément, par exemple, que la mesure de la déformation du tube métallique des manomètres courants soit, à la longue, entachée d'une erreur plus ou moins forte.

Aussi est-il nécessaire de recourir à l'étalonnage régulier des manomètres secondaires quels qu'ils soient; cet étalonnage ne peut être réalisé qu'au moyen de manomètres à piston libre ou balances manométriques.

Les principes sur lesquels reposent la construction de ces balances manométriques n'ont jamais fait l'objet d'un exposé complet : aussi nous a-t-il paru intéressant et utile de traiter, en une seule monographie, des théories qui sont à la base de la réalisation des balances manométriques de haute précision et des applications qui ont été faites de ces théories.

*
* *

Cette étude a pu être menée à bien grâce à l'appui de l'Institut pour l'Encouragement de la Recherche scientifique dans l'Industrie et l'Agriculture « I.R.S.I.A. » et des industriels participant aux travaux de l'Institut Belge des Hautes Pressions : nous leur en sommes particulièrement reconnaissants et tenons à leur témoigner notre sincère gratitude.

LES BALANCES MANOMÉTRIQUES

PAR MM.

L. DEFFET

DR. SC.

DIRECTEUR DE L'INSTITUT BELGE
DES HAUTES PRESSIONS

N. TRAPPENIERS,

DR. SC.

ANCIEN ASSISTANT
À L'INSTITUT BELGE
DES HAUTES PRESSIONS

ET

Résumé. — *Le fonctionnement d'une balance manométrique repose sur la mesure d'une charge qu'il faut appliquer à un piston mobile pour le maintenir en équilibre avec la pression hydrostatique à mesurer.*

Ce fonctionnement, simple en principe, pose une série de problèmes tant théoriques que techniques dont les principaux sont la détermination des diamètres du piston et du cylindre et la connaissance de la déformation de ces pièces sous l'effet de la pression; la détermination de l'épaisseur d'huile existant entre piston et cylindre, au moment des mesures, et corrélativement, la détermination de la surface effective du piston; l'établissement d'un dispositif précis d'équilibre, et enfin, les méthodes d'étalonnage des balances.

Ces divers problèmes peuvent trouver leur solution par des études soit expérimentales soit théoriques : le but du travail a été de réunir toutes ces données éparses dans la littérature, d'en faire une revue critique et d'en tirer des conclusions nettes de manière que le calcul et la fabrication de balances manométriques soient rendus plus aisés.

En particulier, le problème du choix du type de balance (à poids suspendus ou accrochés, à piston simple ou différentiel) a été particulièrement étudié, de même que celui du choix du système d'équilibre (rotation ou oscillation du piston).

LISTE DES SYMBOLES

a	Augmentation apparente de la section S.
F.....	Force.
f	Force parasite.
G.....	Poids.
h	Hauteur.
I.....	Moment d'inertie.
k	Coefficient de frottement.
L.....	Force résultante.
L.....	Hauteur du piston, du feuillet d'huile.
L, S, V.....	Forces (théorie de la rotation du piston).
n	Nombre de tours.
P.....	Pression.
p	Pression atmosphérique.
p_0, p_1	Pression d'huile autour d'un axe tournant.
Q.....	Débit d'huile.
R.....	Frottement solide.
R_0	Force de frottement.
r_1, r_2, r_3	Rayon du piston et du cylindre.
S.....	Surface du piston.
S_e	Section effective.
s	Surface extérieure du piston.
T.....	Couple.
T.....	Température.
V.....	Volume.
v	Vitesse d'écoulement.
β	Coefficient de compressibilité.
η	Viscosité.
θ	Angle, azimuth.
Φ	Force de contact normal.
ρ	Densité.
ω	Vitesse angulaire.
ω_c	Vitesse critique.

INTRODUCTION

Les appareils de mesure de la pression peuvent être répartis en deux classes :

1° *Les manomètres primaires*, dont le principe est basé sur la définition même de la pression : $P = \frac{F}{S}$, opposent à la pression inconnue P , une force F ou un poids G , directement mesurables, agissant sur un élément de surface déterminé : S ;

2° *Les manomètres secondaires* qui mesurent la variation d'une grandeur accessoire en fonction de la pression, telle que la résistance électrique d'un métal, la courbure d'un tube métallique, ou toute autre grandeur physique. A ce type d'appareils se rattachent les manomètres Bourdon, les manomètres à manganine, le piézomètre à quartz.

Ces manomètres secondaires doivent être nécessairement étalonnés par rapport à un manomètre primaire.

Tout travail de précision dans le domaine des hautes pressions requiert donc l'emploi d'un manomètre primaire, soit pour la détermination directe des pressions, soit pour l'étalonnage d'instruments secondaires.

Les manomètres primaires peuvent eux-mêmes se répartir en deux classes bien distinctes :

- a. Les manomètres à mercure;
- b. Les manomètres à piston libre ou balances manométriques.

a. *Les manomètres à mercure*, étalons primaires de grande précision, deviennent d'un emploi difficile dès que la pression excède une dizaine d'atmosphères. En effet, la mesure d'une pression de 100 kg/cm^2 par exemple, nécessiterait l'utilisation d'une colonne de mercure de 75 mètres. Si même l'on ne tient pas compte du coût élevé d'une telle colonne, ni des difficultés de fabrication et d'installation, il faut considérer que les mesures à effectuer sont longues et ardues. En effet, les variations de température le long de la colonne et l'effet du gradient de pression sur la densité du mercure entraînent des corrections compliquées; la mesure précise d'une hauteur de 75 mètres impliquant elle-même la résolution des problèmes non négligeables. Aussi mérite-t-il d'être signalé qu'AMAGAT, au cours de ses mesures sur la compressibilité de l'azote en 1878, fit usage d'un manomètre ouvert à mercure, ayant plus de 300 mètres de hauteur qu'il installa dans le puits de Verpillieux près de Lyon, et que CAILLETET fit de son côté ériger en 1894 une colonne à mercure de 300 mètres dans la tour Eiffel.

b. *Les manomètres à piston libre ou balances manométriques* sont des manomètres primaires plus maniables, qui ont été imaginés spécialement pour la mesure de pressions élevées.

Actuellement les modèles les mieux conçus permettent de mesurer des pressions s'étendant de 5 à 3 000 kg/cm² avec une précision du 1/10 000; sous la forme légèrement différente que leur donna BRIDGMAN, de telles balances peuvent être employées jusqu'à 13 000 kg/cm².

La présente monographie est spécialement consacrée à l'étude des manomètres à piston libre, les manomètres à colonne de mercure faisant toutefois l'objet d'une description succincte.

CHAPITRE PREMIER

PRINCIPES. — HISTORIQUE

I. Le principe qui est à la base du fonctionnement d'une balance manométrique découle directement de la définition des manomètres primaires.

Il consiste à déterminer le poids G qu'il faut appliquer à une surface mobile S pour la maintenir en équilibre avec la poussée hydrostatique P à mesurer. A l'équilibre, P est donné par

$$P = \frac{G}{S} + p$$

p étant la pression atmosphérique, qui doit nécessairement être introduite dans les mesures.

En pratique, on applique la pression inconnue à l'intérieur d'un cylindre sous un piston bien ajusté, coulissant librement, et dont la section constitue la surface mobile S . Il apparaît tout de suite que, malgré la simplicité de l'idée de base, la réalisation présente certaines difficultés. En effet, pour que la pression mesurée à la balance manométrique soit effectivement déterminée par :

$P = \frac{G}{S} + p$ il faut que le piston ait une section bien définie et qu'il ne soit pas soumis à d'autres forces que la poussée hydrostatique, les poids équilibrants et la pression atmosphérique. En particulier il faut éviter tout frottement entre le piston et le cylindre, donc laisser un espace suffisant entre les deux parois. Mais, d'autre part, le liquide comprimé, soumis à une pression très élevée, tend à s'échapper par l'interstice qui sépare le piston et le cylindre et cela d'autant plus que ces deux pièces sont moins bien ajustées : dans ce cas, le piston s'enfonce rapidement dans le cylindre rendant toute mesure impossible.

Il apparaît donc immédiatement que les deux conditions : liberté du piston qu'exige le principe de la balance, et étanchéité de l'appareil, dictée par la pratique, sont contradictoires. La valeur d'une balance manométrique dépend directement du soin qui est apporté à la solution de ce problème. Nous montrerons par l'étude théorique du système de frottements entre piston et cylindre, comment une balance manométrique peut satisfaire aux deux conditions mentionnées ci-dessus et être à la fois un appareil étanche et précis.

II. Divers modèles de balances manométriques ont été réalisés jusqu'à présent : ils diffèrent entre eux par la façon dont la force équilibrante est mesurée et par la forme du piston mobile. Toutefois, on peut les rattacher dans tous les cas à trois prototypes dont voici brièvement décrite l'évolution.

a. Les premiers chercheurs dans le domaine des hautes pressions se préoccupèrent surtout de construire des appareils de mesure de pression à indications continues. Le « manomètre à soupapes » inventé par GALLY-CAZALAT, construit successivement par CLAIR, par BIANCHY et par DESCOFFE, en est le premier exemple.

Dans le manomètre que DESCOFFE décrit en 1871 (11)⁽¹⁾, la pression hydrostatique inconnue force un piston de faible section contre un deuxième piston de section plus grande reposant directement sur une membrane flexible. La déformation de celle-ci fait monter du mercure dans un tube en verre, une échelle graduée permettant de lire directement la pression. La combinaison des deux pistons constitue un réducteur de pression analogue au piston différentiel d'un emploi si fréquent dans les appareils à haute pression.

Quoique basé sur un principe ingénieux, le manomètre à soupape n'a qu'une faible valeur pratique : en effet, pour empêcher les fuites du côté de la haute pression le petit piston était entouré d'un bourrage en cuir fortement comprimé (ce dispositif n'était pas utilisé du côté du grand piston, la membrane empêchant la perte de liquide). Ce système entraîne des frottements considérables, et empêche le libre mouvement des pistons qu'exige le principe même de la balance manométrique : il s'ensuit que la précision des mesures est médiocre.

DEPREZ a indiqué le moyen de tourner la difficulté : au lieu d'empêcher les fuites autour du piston par un bourrage on peut simplement se servir d'un piston parfaitement cylindrique, coulissant dans un cylindre en acier, ajusté de telle sorte que l'espace annulaire entre les deux parois soit suffisamment petit pour que le liquide comprimé ne s'écoule que très lentement. Dans un tel système, le piston est entièrement libre; la légère fuite qui subsiste, n'influe pas sur le principe de la mesure, puisque la diminution de volume causée par le liquide qui s'échappe est compensée automatiquement par la descente du piston, la pression restant constante.

Cette idée, appliquée dans la suite avec succès, sert encore actuellement de base à la construction des *balances manométriques à piston libre*.

Le physicien français AMAGAT perfectionna, en 1887, le manomètre de DESCOFFE d'après les indications de DEPREZ. Son but fut de construire un manomètre à indications continues qui lui permettrait de poursuivre ses recherches sur la compressibilité des gaz à haute pression.

Dans son « manomètre à pistons libres » bien connu (2, 3) il substitua aux soupapes à membrane des pistons coulissant librement.

La pression à mesurer agit sur un piston de section S_1 solidaire d'un autre piston à grande surface S_2 , lequel transmet la poussée à un petit réservoir rempli de liquide. Le rapport de la pression inconnue p_1 à la pression p_2 du réservoir est donné par :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{S_1}{S_2}.$$

Pour un rapport $\frac{S_1}{S_2}$ convenable, p_2 sera suffisamment petit pour être mesuré à l'aide d'une colonne à mercure, branchée sur le réservoir.

(1) Les chiffres entre parenthèses se rapportent à la table bibliographique.

Avec cet appareil, AMAGAT effectua des mesures jusqu'à des pressions de 3 000 kg/cm². Afin d'ajuster le rapport $\frac{S_1}{S_2}$ de façon à avoir une hauteur maximum de 5,20 m dans la colonne R, il employa deux grands pistons de 6 et 12 cm de diamètre et un jeu de petits pistons, le plus petit ayant 0,5527 cm de diamètre.

AMAGAT perfectionna encore sa balance à d'autres points de vue pour réduire la fuite à un minimum, il employa des liquides de compression de grande viscosité tels que l'huile de ricin ou la mélasse, et munit l'appareil d'un injecteur qui permet d'éviter que le piston ne descende trop bas. Enfin, reprenant une idée de BOURDON, il songea à imprimer aux pistons un mouvement de rotation, ce qui eut pour résultat d'éliminer presque entièrement les frottements solides entre piston et cylindre.

La balance à pistons libres fut adaptée par VIEILLE (28) à l'étalonnage des crushers et est encore utilisée à cet usage à l'heure actuelle. Ce cas mis à part, les balances à indications continues ne sont plus employées : on leur préfère des manomètres secondaires d'un emploi plus commode. La balance manométrique est en effet devenue uniquement un appareil d'étalonnage et comme tel le manomètre à pistons libres avec ses deux pistons réducteurs de pression ne saurait atteindre la précision d'autres modèles de balances plus simples.

b. Le type habituel et le plus répandu de balance manométrique n'utilise qu'un seul piston de forme cylindrique simple. La force équilibrante est mesurée directement par des poids chargés sur le piston. Un tel appareil ne peut évidemment servir qu'à des étalonnages et ne peut être employé pour effectuer des mesures continues.

Il est difficile de dire quel est le premier constructeur de ce genre d'appareils, mais il est un fait certain que BOURDON s'en servait déjà couramment pour calibrer ses tubes de manomètres.

En 1880, CAILLETET décrivit une balance manométrique à piston simple (9), construite d'après le principe de DEPREZ. Ce manomètre ressemble dans ses parties essentielles à une balance manométrique moderne. L'espace annulaire compris entre piston et cylindre a une valeur inférieure à 1/200 mm; les poids sont appliqués à l'aide d'un levier, très mobile, monté sur des axes. CAILLETET estimait que les indications fournies par l'appareil, fonctionnant jusqu'à 1 500 kg/cm², étaient exactes au 1/200 de la valeur mesurée, quoique employant de l'eau comme liquide de compression il ait été obligé de placer de la baudruche au-dessous du piston pour empêcher l'écoulement du liquide.

Dans d'autres balances manométriques du type simple, telles que les modèles construits par RUCHOLTZ (25) en 1883 et par ALTSCHUL (1) en 1893, la charge est appliquée directement sur le piston à l'aide d'un plateau à poids, ce qui rend la mesure plus précise.

La balance de STUCKRATH (27) est souvent citée comme prototype des balances manométriques à piston cylindrique simple. Elle fut construite en 1894 pour le « Technische Reichsanstalt » et a servi de modèle à la plupart des balances employées par HOLBORN et son école, au cours des recherches sur la compressibilité des gaz. C'est également sur cet appareil que furent faites les

premières déterminations systématiques de la reproductibilité et de la précision des balances manométriques.

Le piston de la balance de STUCKRATH a un diamètre de 0,5 cm et est pourvu à ses deux extrémités de membranes en baudruche, l'écoulement du liquide de compression étant ainsi presque complètement supprimé. Toutefois, les forces de frottement entre ces membranes et la paroi du cylindre sont considérables : elles s'ajoutent au poids pour des mesures faites à piston ascendant, elles se retranchent pour les expériences effectuées à piston descendant. La valeur exacte se trouve donc comprise entre deux limites, d'ailleurs fortement variables, que les constructeurs essayèrent d'évaluer par comparaison avec les indications données par un manomètre à mercure. Ils estimèrent leurs mesures après les diverses corrections nécessaires, précises à $0,04 \text{ kg/cm}^2$. Dans un travail d'ensemble, traitant de la valeur comparée des balances manométriques de son époque, WIEBE (29) attribue à la balance de STUCKRATH une précision du $1/500$ en valeur relative.

Notons enfin que la balance à piston cylindrique simple, de construction relativement aisée, est le type de manomètre primaire adopté par la plupart des chercheurs et laboratoires contemporains travaillant dans le domaine des hautes pressions : HOLBORN et collaborateurs (12 à 15), BRIDGMAN (7, 8), BASSET (4), le Massachusetts Institute of Technology (16, 17), et le U. S. National Bureau of Standards (21).

c. Mentionnons pour terminer ce bref aperçu historique, un troisième type de balance manométrique, développé au « National Physical Laboratory » à Teddington (31). Cet appareil se distingue des précédents par l'emploi d'un piston dit « différentiel », c'est-à-dire un piston se composant de deux parties de sections différentes. La pression inconnue est appliquée sur la surface annulaire, égale à la différence entre les deux sections (fig. 1).

Avec un tel système on peut rendre la section effective pratiquement aussi petite qu'on le désire en s'arrangeant pour que les diamètres des deux sections soient très proches l'un de l'autre, tout en conservant une solidité suffisante du piston. Ce genre d'appareil a surtout été perfectionné par MICHELS (22, 23, 24) et l'a aidé à réaliser d'importants travaux relatifs au fonctionnement des balances manométriques. Sa balance, permettant de mesurer des pressions jusqu'à $3\,000 \text{ atm}$, peut être considérée comme la plus précise à l'heure actuelle.

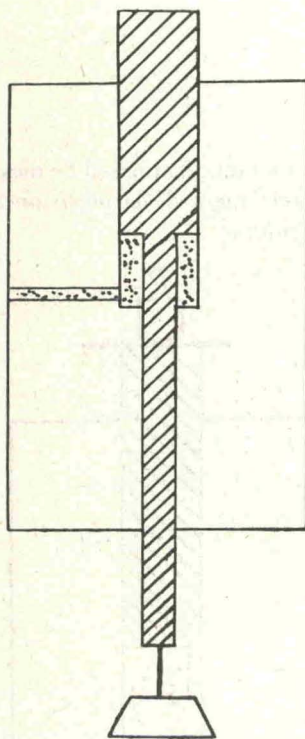


FIG. 1

CHAPITRE II

THÉORIE DE LA BALANCE MANOMÉTRIQUE

§ 1. Généralités

En tant qu'appareil de mesure la valeur d'une balance manométrique dépend directement de la *précision* avec laquelle elle permet d'évaluer une pression inconnue.

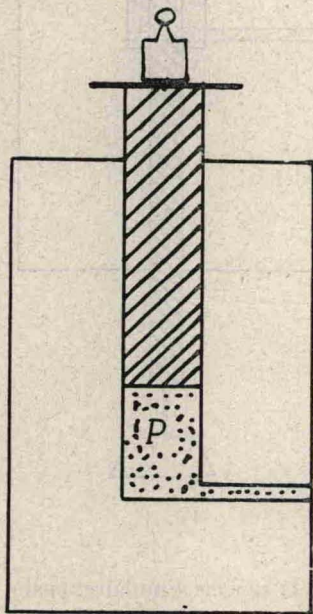


FIG. 2

L'étude théorique de la balance aura pour but de déterminer les différentes erreurs, systématiques ou autres, dont cette méthode de mesure est entachée, d'en évaluer l'importance et aussi de définir le moyen de les corriger ou de les diminuer, et de porter au maximum la *précision* que l'appareil est susceptible d'atteindre.

A. ÉLÉVATION EFFECTIVE. — Imaginons une balance manométrique dans sa forme la plus simple, c'est-à-dire consistant en un piston cylindrique en acier coulissant étroitement dans un cylindre également en acier (fig. 2). La pression inconnue P , transmise par un liquide approprié, est appliquée sous le piston et est équilibrée par des poids chargés sur le piston.

Supposons que le piston soit un cylindre géométrique parfait. Si S est sa section et F la force totale qui y est appliquée (à l'exception de la poussée hydrostatique à mesurer P et de la pression atmosphérique p), l'équation :

$$(1) \quad P = \frac{F}{S} + p$$

donnera la valeur de P au point A, correspondant à la base parfaitement plane du piston.

MEYERS et JESSUP (21) font très justement remarquer que par suite des procédés d'usinage et de rectification, les pistons sont toujours arrondis à leurs extrémités et présentent une légère excavation à leur base.

On peut toutefois conserver l'expression (1) à certaines conditions.

Désignons par S la section maximum du piston. En un point B quelconque la pression est donnée par :

$$(2) \quad P_B = \frac{F + v\rho}{S} + p$$

v étant le volume d'huile au-dessus de B dans le cylindre de section S et ρ sa densité (fig. 3). Dans le tube de connexion, au point E à une hauteur h au-dessus de B, la pression s'exprimera par :

$$(3) \quad P_E = \frac{F + v\rho}{S} - \rho h + p \quad \text{ou} \quad P_E = \frac{F + v\rho - \rho hS}{S} + p.$$

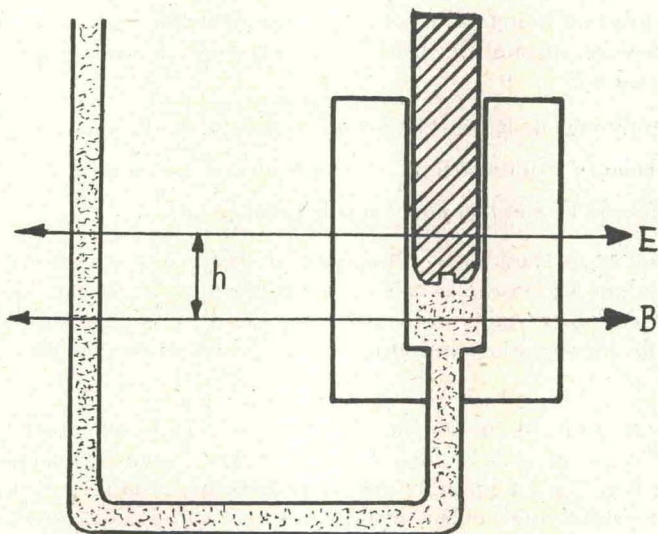


FIG. 3

Si la hauteur E est choisie telle que : $hS = v$ on obtient :

$$P = \frac{F}{S} + p.$$

expression qui est identique à la formule (1). La hauteur E ainsi définie, est appelée « élévation effective de la balance manométrique ». Pour des mesures précises, par exemple lors d'un étalonnage avec une colonne à mercure, il faudra que la pression P exercée par la colonne soit mesurée précisément à la hauteur E.

B. EMPLOI DE LA BALANCE MANOMÉTRIQUE. — La mesure d'une pression à la balance manométrique peut revêtir deux aspects différents qu'il convient de distinguer.

1° Le plus souvent la balance manométrique sert à l'étalonnage de manomètres secondaires. L'instrument à étalonner et la balance manométrique, chargée d'un certain poids, sont branchés sur une presse à haute pression à l'aide de laquelle est créée une pression suffisante pour faire flotter le piston de la balance manométrique. Lors de l'étalonnage la pression mesurée a été fixée préalablement par la charge sur le piston de la balance manométrique et l'équation (1) indique que la connaissance de F , S et p suffit à déterminer sa valeur.

Il en est de même dans le cas d'une mesure de compressibilité de gaz, lors de laquelle la pression est une variable indépendante dont la valeur est fixée par la balance manométrique elle-même.

2° Il est des cas toutefois où la balance manométrique est appelée à déterminer une pression inconnue et fixe. Nécessairement la mesure s'effectuera alors en deux stades :

a. L'équilibrage de la pression inconnue par une autre pression $\frac{F}{S} + p$, établie à la balance manométrique, et susceptible d'une détermination directe;

b. Mesure de F , S et p comme dans le premier cas.

C. ERREURS DE LECTURE. — PRÉCISION. — D'après ce qui précède, la détermination d'une pression à la balance manométrique se ramène à l'évaluation de F et S et dans certains cas à une opération d'équilibrage supplémentaire. Chacune de ces opérations introduit des causes d'erreurs que l'on peut classer comme suit :

a. *Mesure de F.* — On pourrait désigner par balance manométrique idéale la balance pour laquelle la force F serait égale au poids G , nécessaire pour maintenir le piston en équilibre avec la poussée hydrostatique P . La pratique toutefois a montré qu'en dehors de G le piston est soumis à des forces parasites f positives ou négatives, dues aux frottements solides entre les parois ou encore à l'écoulement visqueux du liquide de compression autour du piston.

1° Pour autant que ces forces sont *définies*, c'est-à-dire fonctions de variables connues et de ce fait mesurables, leur action ne nuit pas au bon fonctionnement de la balance manométrique.

Ainsi, par exemple, l'écoulement du liquide de compression autour du piston exerce un frottement sur celui-ci. La théorie hydrodynamique permet de calculer cette fonction et d'affirmer qu'elle dépend uniquement de la distance entre les parois du piston et du cylindre et de la pression P .

Ayant déterminé la valeur des différences variables, il sera possible de calculer la correction due aux forces parasites définies. L'erreur introduite ne dépendra que de la précision avec laquelle ont été mesurées les variables.

2° Par contre, l'introduction de forces non définies dans la mesure de la force F donne lieu à des erreurs très importantes. Par le fait qu'elles dé-

pendent de variables non susceptibles d'être mesurées ou même soupçonnées, l'évaluation directe par voie expérimentale ou théorique est rendue impossible. Ce sont ces éléments inconnus qui définissent la *sensibilité* et la *reproductibilité* de la balance manométrique.

On dira qu'une mesure à la balance manométrique est reproductible dans la mesure où les éléments non définis sont éliminés. L'effort principal visant à l'augmentation de la précision de la balance manométrique portera sur une amélioration de la reproductibilité, c'est-à-dire sur l'élimination des forces de frottement.

Nous désignerons l'erreur introduite par un manque de reproductibilité par P_1 .

b. *Mesure de S. — Section effective.* — 1° Au point de vue pratique, il est plus avantageux d'écrire l'équation (1) sous la forme :

$$(4) \quad P = \frac{G + f}{S_{(1)}} = \frac{G}{S + a_{(2)}}.$$

La grandeur $Se = S + a$ ainsi définie est appelée *section effective* de la balance manométrique; a étant l'accroissement apparent de la section par suite de l'action des forces f .

De (4)₁, il suit que :

$$S = \frac{G + f}{P}$$

en combinant avec (4)₂, il suit :

$$P = \frac{PG}{G + f + aP}.$$

D'où :

$$(5) \quad a = \frac{-f}{P}.$$

La section effective Se une fois déterminée, constitue une constante de la balance et la mesure d'une pression inconnue se ramène alors à la détermination du poids G qui équilibre le piston. Nous verrons dans la suite comment évaluer la contribution des différentes forces définies f , à la valeur de a .

2° *Mesure de S.*

Dans le cas d'un piston en matériau incompressible et non dilatable la surface S garderait une valeur constante, entachée uniquement d'une erreur de mesure de surface. En pratique, il faudra tenir compte des déformations de l'acier sous l'influence de la température et de la pression, c'est-à-dire que S devient une fonction de P et de T .

Nous désignerons par ΔP_2 , l'erreur commise dans l'évaluation de la section effective.

c. *Équilibrage de deux pressions.* — Dans le cas particulier où la balance manométrique sert à la mesure d'une pression fixe inconnue, l'opposition de deux pressions requiert l'emploi d'un dispositif d'équilibre.

Un tel système associé à un déséquilibre des deux pressions opposées (pression inconnue et pression établie à la balance manométrique) la variation d'une autre grandeur aisément mesurable et de préférence une longueur.

Un système de repérage d'équilibre est caractérisé par sa sensibilité : $s = \frac{aL}{dP}$. Si L est la plus petite distance observable, l'erreur due à l'opération d'équilibrage s'exprimera par $P_3 = \frac{\Delta L}{s}$.

En conclusion, la précision d'une balance manométrique dépend essentiellement des éléments suivants :

- 1° La reproductibilité des mesures; ΔP_1 .
- 2° L'erreur commise dans la mesure de la section effective (Se) et du poids G; ΔP_2 .
- 3° Éventuellement, l'erreur d'équilibrage; ΔP_3 .

La précision, définie par l'erreur totale maximum pouvant se commettre au cours d'une mesure, est donnée par :

$$\Delta P = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3$$

ou en valeur relative :

$$(6) \quad \frac{\Delta P}{P} = \frac{\Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3}{P}$$

Ayant ainsi défini les éléments dont dépend la précision d'une balance manométrique, nous passerons maintenant en revue chacun de ces éléments.

§ 2. La reproductibilité. Forces de frottement

A. GÉNÉRALITÉS. — Lors d'un déplacement vertical du piston de la balance manométrique, il s'introduit inévitablement des forces de frottement solide entre la paroi du piston et celle du cylindre. De tels déplacements sont inhérents au fonctionnement même de la balance. En effet :

1° La fuite du liquide de compression provoque un lent enfoncement du piston;

2° Une mesure, consistant en une augmentation ou une diminution du poids sur le piston, se traduit par une oscillation de celui-ci autour de sa position d'équilibre.

a. *Frottements*. — Si un solide A est pressé sur un autre solide B avec une force normale Φ_0 et si f_0 est la force nécessaire pour l'entraîner à une vitesse uniforme v , le solide B exerce une force de frottement $R_0 = -f_0$. Aussi longtemps que la force f qui agit sur A vaut : $f < f_0$, ce solide ne se déplace pas et B exerce une *force de réaction* $R = -f$. f_0 est indépendant de la vitesse v et de l'étendue de la surface de contact et est donné par : $f_0 = k\Phi_0$ où k est un coefficient, dit de frottement, qui ne dépend que de la nature des surfaces en contact.

Examinons l'influence de tels frottements sur le fonctionnement de la

balance manométrique. La force totale sur le piston sera donnée par $f = (P \times S) + F$.

Désignons le frottement par $k\varphi_0$ et la force de réaction par R.

Trois cas peuvent alors se présenter :

1° Si $f = 0$; R = 0;

2° Si $0 < |f| < f_0$; R = $-f$. Cette force de réaction maintient le piston dans une position de faux équilibre;

3° Si $|f| \geq f_0$; R = $-f_0 = k\varphi_0$. Il s'introduit une force de frottement qui n'est toutefois pas fixe puisque φ_0 n'est pas constant et k varie d'un point à l'autre de la surface.

b. *Sensibilité*. — Le piston soumis à une force f ne se déplacera pas aussi longtemps que f est donné par $f < |f_0|$, c'est-à-dire une valeur de f comprise entre $+|f_0|$ et $-|f_0|$.

Dans le cas le plus défavorable, l'excédent de pression qu'il faudra pour déplacer le piston sera donné par :

$$\Delta P = \frac{2|f_0|}{S}$$

à laquelle il correspond une différence en poids de $\Delta G = 2|f_0|$.

Ce poids minimum nécessaire pour obtenir un déplacement du piston, définit la *sensibilité* de la balance manométrique. Notons encore que sa mesure nécessite l'emploi d'un système de repérage d'équilibre lequel à son tour introduit une erreur de mesure. Nous reviendrons sur ce point, en traitant du dispositif de repérage d'équilibre.

c. *Reproductibilité*. — L'erreur introduite dans les mesures par suite des frottements solides est associée à la notion de reproductibilité. On pourrait songer à déterminer expérimentalement la variation du frottement R_0 et voir quelle est la dispersion des résultats pour une grande série de mesures. Pour ce, il suffit de mesurer plusieurs fois une même pression bien fixe à la balance manométrique. La dispersion des résultats est imputable à la variation des forces de frottement. Si donc on prend la précaution d'atteindre l'équilibre d'un même côté, par exemple en faisant toutes les mesures à piston descendant, l'on aura déterminé la valeur ΔR_0 qui exprime les limites entre lesquelles peut varier le frottement R_0 .

R_0 mesure directement la *reproductibilité* de la balance manométrique.

Comme ΔR_0 est une fonction croissante de R_0 , l'amélioration de la sensibilité et de la reproductibilité de la balance manométrique ne peut être obtenue que par une diminution des frottements solides.

B. THÉORIE DE LA ROTATION DU PISTON. — Les premières balances manométriques, telle que celle de STUCKRATH ou de CAILLETET, n'avaient pas de dispositifs permettant d'éliminer les frottements solides, aussi leur reproductibilité était-elle médiocre; WIEBE (30) essaya de diminuer les frottements par l'application de légers coups de marteau sur le piston, mais n'obtint que des résultats peu appréciables. C'est à AMAGAT que revient l'idée d'appliquer une rotation au piston; ce système qui lui donna des résultats remarquables est encore en usage dans les appareils modernes.

En 1908, KLEIN (20) tenta de donner une explication théorique de l'influence de la rotation, toutefois son interprétation, comme le montra MICHELS, fut simpliste et inexacte.

MICHELS (22), reprenant une étude de SOMMERFELD (26) traitant des frottements entre un axe et son support, l'appliqua avec succès au cas de la balance manométrique, en la complétant au cas limite d'une faible vitesse de rotation. Reprenons les principaux résultats de cette théorie.

a. *Cas d'un axe horizontal.* — Soit un axe horizontal tournant dans un support bien lubrifié. L'expérience montre qu'à faible vitesse de rotation les frottements sont du type « frottements secs » c'est-à-dire, à peu de chose près, les mêmes frottements que ceux qui prennent naissance lorsque deux surfaces solides, en contact, se déplacent l'une par rapport à l'autre. Rappelons que les

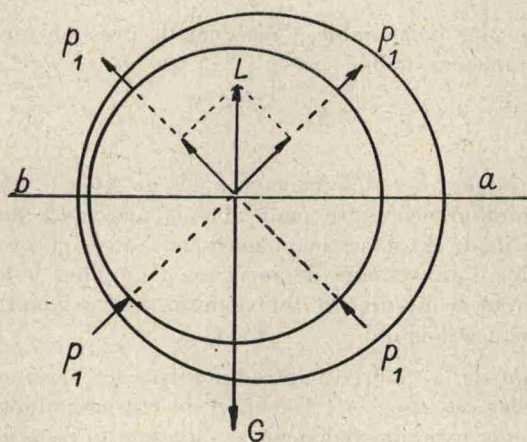


FIG. 4

forces de frottements sont indépendantes de la vitesse relative des surfaces et sont proportionnelles à la force de contact, normale aux deux surfaces.

A grande vitesse de rotation, l'image est tout autre : les frottements sont alors du même type que ceux exercés par un courant liquide sur une surface immobile. Les frottements seront alors indépendants de la pression mais proportionnels à la vitesse relative de rotation.

1. SOMMERFELD interprète ces faits très simplement en supposant qu'à grande vitesse il n'y a pas de contact direct entre l'axe et son support mais qu'une mince couche d'huile sépare les deux surfaces. Quelle est l'origine de la force qui soulève l'axe ?

Supposons que l'axe ait une position excentrique par rapport à son support avec le sens de rotation indiqué, et faisons abstraction des courants liquides parallèles à l'axe et des forces qui en résultent (fig. 4).

SOMMERFELD montre que, dans ce cas, la couche d'huile est le siège de diverses pressions :

1° La pression p_0 constante en chaque point de la couche;

2^e Une pression p_1 variable, mais telle que sa valeur est la même en deux points symétriques par rapport à ab , ab étant une droite passant par le sommet de l'excentricité et le centre de l'axe. En A et en B, la pression est nulle; entre ces deux positions, la pression atteint un maximum.

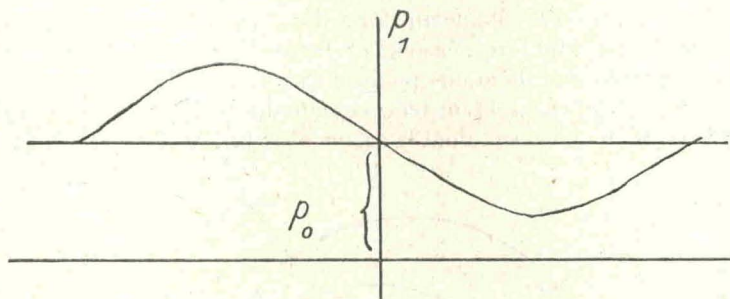


FIG. 5

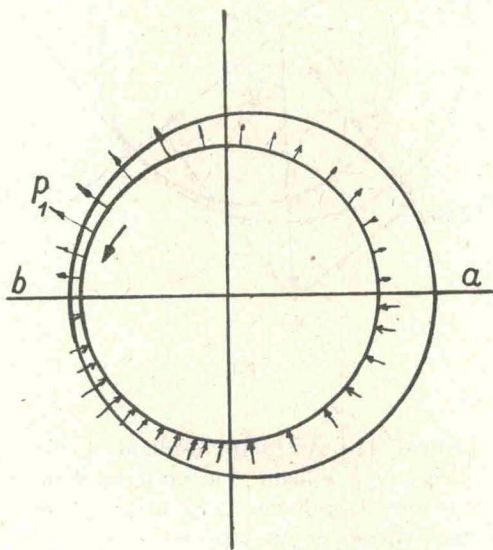


FIG. 6

La figure 5 donne une représentation graphique de p_1 le long de la circonférence. La figure 6 donne une idée plus claire de la distribution des pressions p_1 . Le maximum de pression croît en fonction de la vitesse, de l'excentricité et de la viscosité; le maximum se déplace vers le point de plus grande proximité des deux parois (B). Dans le cas limite, le maximum devient infini et coïncide avec B.

La pression p_0 correspond à la pression hydrostatique de l'huile, et p_1 résulte du fait que l'huile, entraînée par l'axe est comprimée en dessous de ab dans l'espace qui sépare les deux parois et qui va en décroissant, mais est détendue

au-dessus de ab , puisque le même espace, toujours dans le sens de la rotation, va en augmentant (fig. 4).

L'action sur l'axe de ces différentes forces est la suivante :

1° p_0 n'a aucune influence puisque sa résultante est nulle;

2° p_1 , au-dessus de ab , donne une force dirigée vers le haut qui tire sur l'axe; au-dessous de ab , cette force, également dirigée vers le haut, exerce une poussée. La résultante sera donc une poussée dirigée vers le haut;

3° En plus de p_0 et p_1 , il faut tenir compte des forces de frottement liquide dues à la rotation de l'axe et dont la valeur n'est pas la même en chaque point

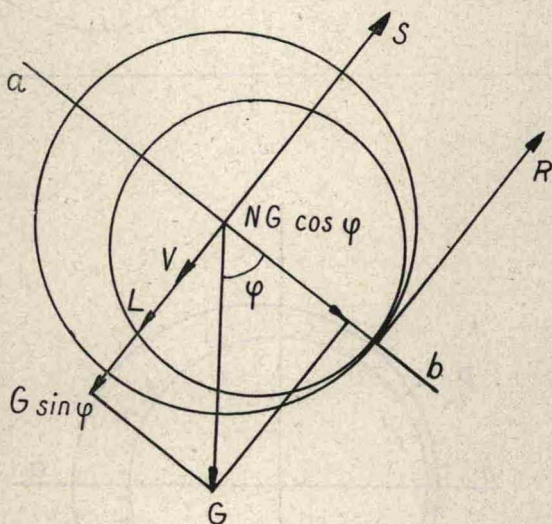


FIG. 7

SOMMERFELD a calculé la force totale résultante L : cette force est perpendiculaire à ab et dirigée vers le haut et a son point d'application au centre de l'axe. En outre, cette force L croît avec la viscosité, la vitesse de rotation et l'excentricité. Pour une vitesse et une viscosité données, on peut déterminer l'excentricité, pour que L soit égal au poids de l'axe; à ce moment le contact entre support et axe est rompu et le film d'huile apparaît.

Si la vitesse vient à changer, l'excentricité varie automatiquement dans le sens qui fait se rétablir et persister l'équilibre.

b. *Théorie de Michels* (22). — La théorie de SOMMERFELD est toutefois insuffisante dans le cas limite d'une très faible vitesse de rotation et donne lieu à différentes objections.

En effet, si pour une très faible vitesse de rotation, l'on veut obtenir une force L , susceptible d'annuler le poids de l'axe, il faudrait une excentricité très grande. Ne faut-il pas craindre alors que les aspérités des deux surfaces finissent par s'accrocher? Ensuite, p_1 étant beaucoup plus grande que p_0 , que devient $p_0 - p_1$, c'est-à-dire quelle serait la signification d'une pression négative?

Enfin quelles sont les forces qui influent sur la position d'équilibre et cet équilibre est-il stable? Par une brève analyse, MICHELS a trouvé une réponse à ces questions et a complété ainsi la théorie de SOMMERFELD pour le cas d'une faible vitesse de rotation.

a. Analyse. — Considérons l'axe à un moment où la vitesse de rotation est suffisamment petite pour que nous soyons dans le cas des « frottements solides » c'est-à-dire qu'il y a contact direct entre l'axe et son support.

Les forces agissant sur l'axe sont (fig. 7) :

- 1° Le poids de l'axe G ;
- 2° Le frottement solide R ;
- 3° La pression hydrodynamique;
- 4° Les frottements d'huile, agissant sur les parties de l'axe non en contact avec le support.

Au repos, l'axe n'est soumis qu'à la force G : l'excentricité est alors dirigée vers le bas.

Dès que l'axe est soumis à une faible rotation, les forces de frottements solides R reportent l'excentricité vers la droite (le sens de rotation étant indiqué sur la figure). Contrairement à ce qui se présentait de par l'hypothèse précédente (fig. 4), les forces hydrodynamiques p_1 , perpendiculaires à l'axe et dirigées vers l'extérieur sont maintenant au-dessous de ab , les forces hydrodynamiques dirigées vers le centre sont au-dessus de cette ligne idéale. La résultante L sera donc dirigée vers le bas.

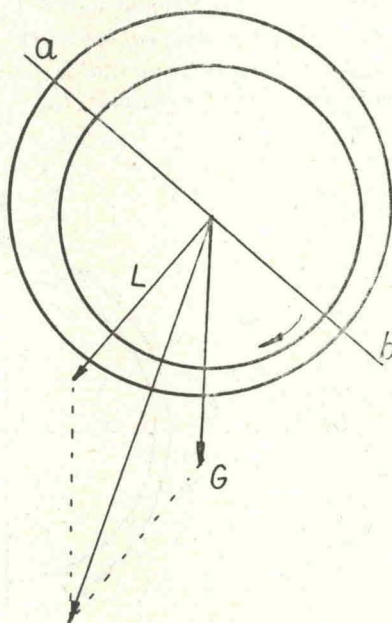


FIG. 8

La force G peut être décomposée en ses composantes, l'une perpendiculaire à ab , l'autre parallèle à ab . Cette dernière, fournissant la force normale qui amène l'axe en contact avec son support, est égale à $N = G \cos \varphi$. Comme nous l'avons vu, le frottement solide est alors donné par : $R = kG \cos \varphi$ ($k =$ coefficient de frottement).

On sait qu'une force telle que R peut toujours être décomposée en un couple de force S ayant son point d'application au centre. De la même façon le frottement liquide Q peut être remplacé par un couple et une force V s'appliquant au centre et coïncidant avec L . Les couples de force résistants sont vaincus par le mécanisme moteur et n'interviennent donc pas dans la discussion.

Finalement il restera :

- a. Une force parallèle à ab : $N = G \cos \varphi$ soutenue par le support;
- b. Une force perpendiculaire à ab : $L + V + (G \sin \varphi) - (kG \cos \varphi)$.

Il ne peut y avoir équilibre que lorsque la résultante de ces forces est nulle, c'est-à-dire lorsque :

$$(7) \quad \begin{cases} kG \cos \varphi = L + V + G \sin \varphi \\ L + V = G (k \cos \varphi - \sin \varphi) \end{cases}$$

$L + V$ croissant avec la vitesse de rotation U et l'excentricité.

β . *Discussion complète du problème.* — a. *A l'arrêt* : on a $L + V = 0$. Les frottements sont également nuls et $0 = -G \sin \varphi$; $\varphi = 0$.

b. *pour des petites valeurs de U* : $L + V$ prennent des valeurs positives mais petites et on tend vers la position d'équilibre. Connaissant L et V on peut tirer φ de l'équation (7).

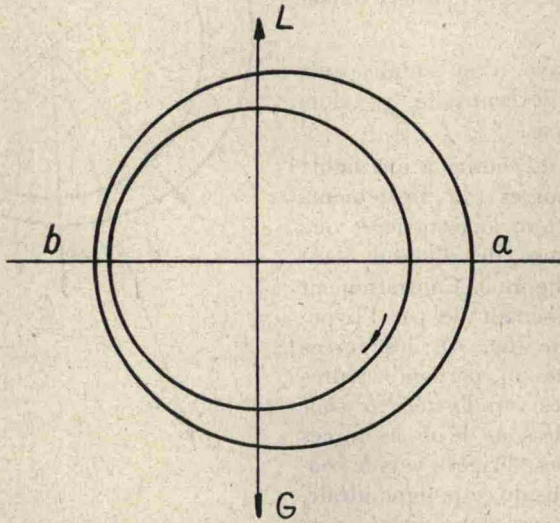


FIG. 9

Toutefois ici un nouveau facteur apparaît.

Nous avons mentionné que le calcul de SOMMERFELD montre que la pression hydrodynamique croît avec l'excentricité de l'axe et devient infinie dans le cas où l'axe et le support sont en contact. Ceci n'est toutefois vrai qu'à condition d'avoir deux surfaces parfaitement polies, de façon à ce que l'huile ne flue pas au moment du contact. Cette condition n'étant jamais réalisée, p_1 ne sera jamais infiniment grand. Néanmoins, à vitesse croissante et pendant que le contact entre l'axe et le support persiste, c'est-à-dire à grande excentricité, il est évident que p_1 croîtra tellement qu'il deviendra plus grand que p_0 . Rappelons que dans le cas où l'excentricité est à droite la pression dans la couche d'huile est de $p_0 - p_1$ au-dessous de ab et $p_0 + p_1$ au-dessus; $p_0 + p_1$ aura donc une valeur négative. Comme l'huile ne supporte pas de pressions négatives

élevées sans vaporisation, la force sera inférieure à sa valeur théorique et sera dirigée vers l'extérieur.

Il en résulte que la force correspondante au-dessus de ab ne sera pas complètement équilibrée par la force symétrique $p_0 - p_1$ et que la résultante L admet une composante selon ab . Celle-ci est dirigée vers la gauche, parce que le maximum de p_1 (à excentricité et vitesse croissantes) se déplace vers le point de plus grande proximité pour coïncider avec celui-ci dans le cas limite.

L'axe est tiré par cette force composante et l'huile pénétrera entre l'axe et son support. Nous passons donc au cas des frottements liquides.

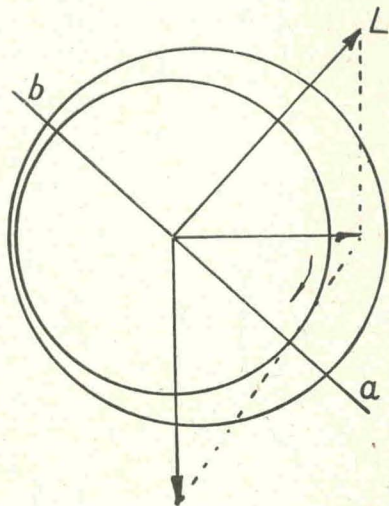


FIG. 10

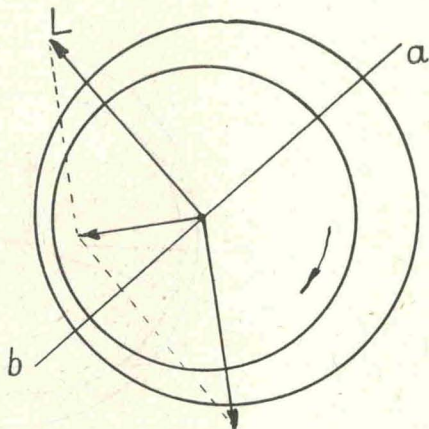


FIG. 11

γ . A partir de ce moment la théorie de Sommerfeld est applicable au calcul des forces résistantes, c'est-à-dire :

- 1° Au couple antagoniste proportionnel à U ;
- 2° A la résultante L perpendiculaire à ab de la pression hydrodynamique et au frottement liquide;
- 3° Au poids G .

L'excentricité était à droite, donc l'axe est dans la position de la fig. 8. La résultante $L + G$ fera glisser l'axe vers le dessous et l'amène près de la paroi. L'excentricité, par conséquent, augmente et L croît. L a en même temps changé sa direction vers la gauche puisque ab s'est déplacé et que le glissement de l'axe vers la gauche continue. L'équilibre ne sera atteint que lorsque $L = G$ et que L et G sont opposés, c'est-à-dire dans la position de la fig. 9.

Cet équilibre est stable puisque :

a. Si L est plus grand que G , l'axe remonte, mais en même temps la position et la valeur de l'excentricité changent et la résultante $L + G$ est dirigée vers la

droite. L'axe suit cette force, l'excentricité diminue et L également. L'axe revient à sa position initiale (fig. 10);

b. Si L est plus petit que G , l'axe tombe, l'excentricité diminue mais la résultante dirigée maintenant vers la gauche, fait augmenter l'excentricité et aussi L . L'axe sera ainsi amené à sa position initiale (fig. 11).

Le cas d'un axe horizontal a été exposé afin de donner la théorie complète sur cette question : passons maintenant au cas particulier d'un axe au piston vertical qui est celui de la balance manométrique qui nous occupe plus particulièrement.

c. *Cas d'un axe ou piston vertical.* — Si l'axe est bien vertical la force G (le poids) n'intervient plus dans le raisonnement. L'équilibre qui était défini par $L = G$ sera maintenant atteint lorsque $L = 0$, c'est-à-dire quand l'axe est parfaitement centré.

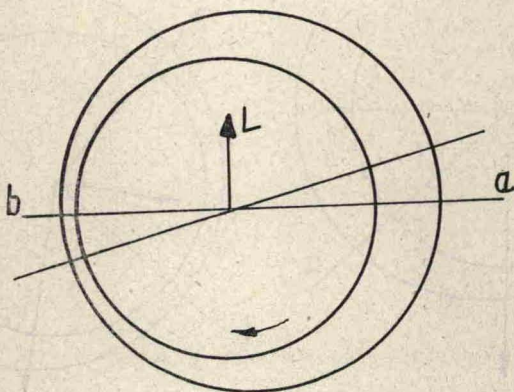


FIG. 12

Toutefois cet équilibre n'est pas stable. En effet, si pour une cause quelconque le piston est dévié de sa position centrée, une force L prend naissance. Elle est perpendiculaire à l'excentricité et provoque un glissement du piston (fig. 12). Mais en même temps l'excentricité change et donc également la direction de la force L . Comme dans ce cas aucune force, dirigée vers le centre, n'est présente pour rétablir l'équilibre, le centre du piston décrira une circonférence sous l'impulsion de la force L .

Si la cause perturbatrice persiste, l'excentricité augmentera jusqu'à ce qu'à un côté la proximité des parois devienne telle qu'une pression négative se produise. Alors, comme nous l'avons vu précédemment au cours du passage du frottement solide au frottement liquide, une pression va en résulter qui éloignera le piston de la paroi du cylindre et l'équilibre sera atteint lorsque cette pression deviendra égale à la cause perturbatrice.

Dans une balance manométrique la pression hydrostatique p_0 va varier avec la hauteur du piston, depuis la pression P mesurée sous le piston, jusqu'à la pression atmosphérique, à l'endroit où l'huile s'écoule au bord supérieur du cylindre.

Comme l'apparition de la force dirigée vers le centre du piston se fera en premier lieu là où p_0 est le plus petit, et comme ce p_0 minimum pour notre balance manométrique est précisément la pression atmosphérique, c'est-à-dire une constante, la force centrale sera indépendante de la pression exercée sous le piston. En conséquence la vitesse de rotation dite *critique* définie comme étant la vitesse limite en dessous de laquelle les frottements solides apparaissent, ne sera pas fonction de la pression⁽¹⁾.

Résumons brièvement les différents stades du mouvement :

1° Comme inévitablement des forces perturbatrices sont présentes, il faut s'attendre à ce qu'au repos, le piston de la balance soit en contact direct avec la paroi inférieure du cylindre;

2° Dès que le piston est animé d'un mouvement de rotation *lent* son centre décrira une circonférence, le piston étant toujours en contact direct avec le cylindre et les frottements étant du type « solide »;

3° Aussitôt que la vitesse de rotation U a atteint la *valeur critique*, une pression négative suffisante prend naissance pour que la force centrale correspondante soit supérieure à la force perturbatrice. Le contact direct entre piston et cylindre est rompu, de l'huile pénètre entre les deux et l'on passe au régime de frottements liquides purs, et pour une vitesse de rotation constante le piston tournera dans son cylindre avec une excentricité constante.

Au début du présent raisonnement nous avons admis certaines conditions simplificatrices qui ne sont pas toujours réalisées en pratique.

α . Le piston et le cylindre ne sont jamais parfaitement cylindriques, donc la distance minimum entre les deux parois change constamment et le mouvement ne sera pas aussi régulier que la théorie le fait prévoir.

Il se pourrait aussi qu'accidentellement des aspérités proéminentes des parois entrent en contact et qu'à vitesse relativement élevée les frottements solides persistent. Si on laisse s'arrêter le piston sous le seul effet des frottements, le moment où les frottements solides réapparaissent ne sera pas toujours le même.

β . Il n'est pas possible de réaliser une position parfaitement verticale du piston; une faible force G sera toujours présente.

d. *Détermination de la vitesse critique.* — MICHELS (22) a indiqué une méthode de mesure de la vitesse critique basée sur le fait que le piston, tournant à une vitesse constante supérieure à la vitesse critique, subit de la part de l'huile un couple de frottement qui est proportionnel à la vitesse angulaire ω . Ce fait expérimental s'interprète facilement si l'on admet que les parois du piston et du cylindre sont assimilables à deux parois planes distantes de $r_2 - r_1$, r_2 et r_1 étant respectivement les rayons du cylindre et du piston. Si la paroi mobile du piston se déplace avec une vitesse v_1 le feuillet d'huile à la surface du piston aura également une vitesse v_1 tandis qu'à la surface du cylindre immobile, la vitesse de l'huile est nulle.

(1) Tout au moins en valeur absolue; la vitesse critique dépendant de la viscosité de l'huile, qui varie avec la pression, dépendra quand même finalement de la pression.

On montre facilement que la variation de la vitesse de l'huile v entre ces deux points est donnée par une expression linéaire :

$$v = -v_1 \frac{r - r_2}{r_2 - r_1}$$

et également

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{v_1}{r_2 - r_1}$$

D'autre part la force de frottement visqueux qu'exerce un liquide de viscosité η sur une surface s en mouvement est donnée par

$$(8) \quad f = \eta s \frac{dv}{dr} = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$$

En remplaçant $\frac{dv}{dr}$ par sa valeur et en introduisant la vitesse $\omega = \frac{v}{r_1}$ on obtient

$$f = -\omega s \eta \frac{r_1}{r_2 - r_1}$$

et pour le moment correspondant T :

$$T = -\omega s \eta \frac{r_1^2}{r_2 - r_1}$$

Le moment de frottement est proportionnel à la vitesse angulaire. En réalité l'expression qui lie le frottement à la vitesse angulaire est plus complexe du fait que les parois du piston et du cylindre ne sont pas rigoureusement parallèles, que la viscosité dépend de la pression et par conséquent de la hauteur du cylindre. Toutefois on peut toujours écrire avec une bonne approximation que

$$(9) \quad T = a\omega$$

expression dans laquelle a est une constante.

D'autre part on peut exprimer le moment de frottement sous la forme :

$$(10) \quad T = I \frac{d\omega}{dt}$$

A partir de (9) et (10) on obtient l'équation

$$(11) \quad a\omega = -I \frac{d\omega}{dt}$$

Une première intégration fournit

$$\omega = \omega_1 e^{-\frac{a}{I}(t-t_1)}$$

où ω_1 est la vitesse initiale au temps initial t_1 .

Comme $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ on obtient par une nouvelle intégration

$$(12) \quad \theta = \frac{\omega_1 I}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{I}(t-t_1)} \right) + \theta_1,$$

θ_1 étant l'angle parcouru à l'instant t_1 .

Prenons θ_1 et t_1 comme origines, c'est-à-dire $\theta_1 = 0$ et $t_1 = 0$ et posons $\frac{a}{l} = \Lambda$.

Alors on obtient

$$(12^1) \quad \theta = \frac{\omega_1}{\Lambda} (1 - e^{-\Lambda t}).$$

Cette équation est valable aussi longtemps que les frottements sont du type visqueux. Elle est caractérisée par la présence d'une constante Λ . Si les frottements solides apparaissent, le moment de frottement augmente et Λ devient plus grand.

On possède donc ainsi le moyen de mesurer la vitesse critique ω_c , c'est-à-dire la vitesse de rotation en dessous de laquelle les frottements solides se font sentir et altèrent la valeur de la constante Λ . Théoriquement, il suffit d'imprimer au piston une vitesse de rotation suffisante, au moyen d'un mécanisme moteur quelconque. Supposons que par un système de débrayage on arrête le couple moteur à un moment précis qui est l'instant $t = 0$. La vitesse du piston qui tourne librement, diminue par suite des frottements et il est possible de mesurer l'angle parcouru θ en fonction de t . On pourrait ainsi, à l'aide de l'équation (12¹), vérifier la constance de Λ . S'il arrive un moment où la valeur de Λ n'est plus constante, la vitesse à cet instant sera précisément la vitesse critique ω_c cherchée.

Toutefois la forme de la fonction (12¹) se prête mal au calcul de Λ à partir de θ et de t .

MICHELS a préféré une autre méthode pour évaluer Λ . Soit n le nombre de tours que ferait le piston si, jusqu'au dernier moment, les frottements liquides persistaient. Dans ce cas le piston ne s'arrêterait qu'après un temps infiniment long.

Si V est le nombre de tours parcourus après un temps t , on a :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Lambda \cdot 2\pi n = \omega_1 \\ 2\pi V = \frac{\omega_1}{\Lambda} (1 - e^{-\Lambda t}) \\ 2\pi V = 2\pi n (1 - e^{-\Lambda t}) \\ V = n (1 - e^{-\Lambda t}) \\ 1 - \frac{V}{n} = e^{-\Lambda t} \\ \Lambda = \frac{-\log\left(1 - \frac{V}{n}\right)}{t} = \frac{\log\frac{n-V}{n}}{t} \end{array} \right.$$

V et t sont mesurés directement; n ne pourra être déterminé que par tâtonnement. On essaiera de trouver une valeur telle que, substituée dans la formule, elle donne une valeur constante pour Λ pour les premières valeurs de V .

e. *Vérification expérimentale.* — 1. En vue de soumettre ces prévisions théoriques à un contrôle expérimental et de déterminer la vitesse critique ω_c , MICHELS a employé une balance manométrique à piston différentiel de 250 kg/cm^2 , sur lequel il a construit un système de mise en rotation, présentant toute garantie de bon fonctionnement. Un entraînement mécanique à moteur se révéla préférable à un entraînement à la main, du fait qu'il permet d'obtenir une vitesse initiale constante et suffisante. Il fut également nécessaire de prévoir un bon système de débrayage de façon à ce que l'on puisse connaître sans ambiguïté l'instant $t = 0$.

La relation (13) indique qu'il faut mesurer V et t ; pour ce faire MICHELS détermine le temps pour que le piston parcoure un nombre de tours donné, par exemple 7. Voici à titre d'exemple une telle série d'observations.

NOMBRE DE TOURS	TEMPS	V	t	NOMBRE DE TOURS	TEMPS	V	t
7.....	7,4	7	7	5.....	9,2	63	84,4
7.....	7,4	14	14,4	5.....	10,2	68	94,6
7.....	8	21	22,4	4.....	8,6	72	103,2
7.....	8,4	28	30,8	4.....	9,8	76	113,0
7.....	9	35	39,8	4.....	10,8	80	123,8
6.....	8,4	41	48,2	3.....	9,4	83	133,2
6.....	9	47	57,2	3.....	10,4	86	143,6
6.....	9,6	53	66,8	2.....	8,6	88	152,2
5.....	8,4	58	75,2	1,6.....	11,8	98*	164

La détermination de n se fait par tâtonnement comme indiqué. On prend par exemple deux termes de la série :

$$V = 35 \text{ avec } t = 39,8; \quad V = 72 \text{ avec } t = 103,2;$$

On essaye différentes valeurs pour n et on calcule la valeur de A correspondant; par exemple :

$$\begin{array}{llll} \text{pour } n = 120 & A = 0,008664 & \text{et} & 0,008878; \\ & 125 & & 0,009118 & & 0,009534; \\ & 127 & & 0,008101 & & 0,008109; \end{array}$$

ainsi la constance de A est la meilleure pour une valeur de n proche de 127, ici 127,2. On peut calculer avec cette valeur $n = 127,2$, toutes les valeurs de A , correspondant au tableau ci-dessus.

V	A. 10 ⁴	V	A. 10 ⁴	V	A. 10 ⁴	V	A. 10 ⁴
7.....	80,8	41.....	80,7	68.....	81,0	86.....	78,5
14.....	81,0	47.....	80,6	72.....	80,9	88.....	77,3
21.....	80,5	53.....	80,7	76.....	80,5	89,6.....	74,3
28.....	80,7	58.....	80,9	80.....	80,1		
35.....	80,9	63.....	81,0	83.....	79,4		

La valeur moyenne de A est de : 80,9 10⁴ à 0,4 près. Le tableau montre que dans ce cas-ci les frottements solides apparaissent entre 72 et 76 tours. La vitesse de rotation correspondante se calcule aisément :

$$(127,2 - 72).60.80,9.10^4 = 29 \text{ tours à la minute et}$$

$(127,2 - 76).60.80,9.10^4 = 27,4 \text{ tours à la minute, c'est-à-dire que la vitesse critique } \omega_c \text{ est de } 27,4 \text{ à } 29 \text{ tours à la minute. Les prédictions de la théorie se trouvent ainsi pleinement vérifiées. Le coefficient A dépend de la viscosité } \eta \text{ de l'huile, laquelle est fonction de la température et de la pression. Il faut s'attendre à ce que A et donc également } \omega_c \text{ soient fonction de ces deux variables. Voici quelques observations expérimentales de l'influence de la température faites par MICHELS.}$

CHARGE	VITESSE CRITIQUE à t° = 12,5°	VITESSE CRITIQUE à t° = 16,5°
226,488.....	24	36
201,488.....	28	27
176,488.....	32	32
151,488.....	27	35
126,488.....	28	34
101,488.....	28	32
76,488.....	29	27
51,488.....	32	30

2. Dans le même travail, cet auteur suggère un autre moyen de contrôler l'existence de deux régimes de frottement, dépendant de la vitesse de rotation. Aussi longtemps qu'il y a frottement liquide, une mince couche d'huile, isolante au point de vue électrique, devrait séparer les parois du piston et du cylindre et présenter une résistance électrique élevée. Si la vitesse tombe

en dessous de la valeur critique et qu'il y aurait donc contact direct entre les deux parois, cette résistance électrique devrait diminuer brusquement.

MICHELS a effectivement vérifié cette prévision au moyen d'un ingénieux dispositif. Une faible différence de potentiel est établie entre le piston et le cylindre et la résistance du circuit est mesurée au moyen d'un galvanomètre très sensible à enregistrement photographique. La vitesse de rotation est inscrite sur la même photo en fonction de la longueur des traits d'une ligne pointillée provenant de l'interception d'un rayon lumineux par deux lamelles métalliques solidaires du piston. On constate qu'au début, à grande vitesse, la résistance oscille autour de la valeur moyenne de 500Ω . Elle tombe brusquement à la vitesse critique, à la valeur constante de $0,2 \Omega$ ce qui correspond à la résistance des fils.

C. THÉORIE DE L'OSCILLATION DU PISTON. — La rotation du piston, comme il a été démontré théoriquement et expérimentalement, s'est manifestée un moyen adéquat pour réduire les frottements solides. Toutefois, HOLBORN et plusieurs autres auteurs après lui, ont formulé des objections quant à son emploi. Lorsqu'on soumet le piston à un couple moteur, il est difficile d'éliminer toute composante verticale. On introduit de ce fait un nouvel élément d'incertitude dans la détermination de la force F , qui agit sur le piston.

HOLBORN et BAUMANN (14) ont préconisé une oscillation du piston au lieu d'une rotation complète. Ainsi, au cours du mouvement de va et vient, la composante verticale devient successivement positive et négative et aura donc une valeur moyenne nulle. Ce système est encore souvent utilisé dans les balances modernes.

MICHELS, se basant sur la théorie de la rotation, a objecté qu'en faisant osciller le piston il faut nécessairement que la vitesse s'annule au moment de l'inversion du mouvement, et que le contact direct entre les parois sera établi à ce moment. Même en supposant qu'entre les deux inversions la vitesse critique soit atteinte, il n'en reste pas moins que l'approche de la position d'équilibre ne peut se faire que d'une façon discontinue, ce qui est certainement un grand désavantage dans le cas de mesures précises.

Notons toutefois qu'en 1932 BEATTIE et BRIDGEMAN (5) ont soumis le procédé d'oscillation à un contrôle de mesure de résistance électrique selon la suggestion de MICHELS. Ils n'ont pas détecté de variation brusque de résistance électrique au moment de l'inversion.

D. CONCLUSIONS. MESURE DE LA REPRODUCTIBILITÉ. MESURE DE LA SENSIBILITÉ. — *a.* L'étude qui précède a fourni une réponse satisfaisante au problème qui s'était posé au premier paragraphe de ce chapitre, à savoir : *comment éliminer les frottements solides?*

1. *Par rotation.* L'étude théorique de SOMMERFELD et de MICHELS, corroborée par l'évidence expérimentale, a montré qu'il suffit de donner au piston une vitesse supérieure à la vitesse critique ω_c . Cette dernière valeur ne peut être déterminée qu'expérimentalement. Elle dépend en définitive :

1° De la construction de l'appareil, c'est-à-dire des dimensions du piston et du cylindre, de l'espace entre les deux parois et du degré de polissage de ces parois;

2° De la viscosité de l'huile et par conséquent de la température et de la pression;

3° Pour un appareil donné et pour des valeurs constantes de P et de n , ω_c n'est pas une constante puisqu'elle dépend directement des forces perturbatrices non définies. La rotation enfin exige une position rigoureusement verticale du piston, ce qui constitue incontestablement un inconvénient.

2. *Par oscillation.* L'oscillation du piston, bien que permettant d'éviter l'inconvénient cité ci-dessus (verticalité rigoureuse du piston) n'a pas pour elle une justification théorique valable et son emploi, lors de mesures précises, n'est certainement pas exempt de critiques. Notons toutefois que le système à oscillation, largement répandu, semble donner des résultats satisfaisants. La fréquence et l'amplitude employées diffèrent suivant les auteurs; ainsi par exemple :

AMPLITUDE	FRÉQUENCE	AUTEUR
60°.....	30/min.	Beattie et Edel
18°.....	„	Holborn et Baumann
30°.....	„	Bridgman
„	„	Keyes

b. Peut-on conclure de la théorie que la rotation *élimine complètement les frottements solides*?

Nous avons vu qu'au-delà de la vitesse critique, le centre du piston décrit une circonférence et que le mouvement se produit à la limite entre frottements liquides et solides. Si les surfaces présentent la moindre irrégularité, soit dans leur forme géométrique, soit dans leur poli, un contact métal-métal momentané peut se produire, donnant lieu à un faible frottement solide. Au cours de l'étude expérimentale citée plus haut, il a été observé que le galvanomètre oscillait une fois par tour, à grande vitesse et deux fois à petite vitesse. Ceci prouve qu'au cours de chaque révolution il y a suivant les cas, un ou deux points de contact, ce qui résulte probablement du fait que le cylindre a une section légèrement elliptique.

Il faut donc admettre que, malgré le mouvement du piston, il peut subsister un faible frottement solide, lequel détermine la sensibilité et la reproductibilité de l'appareil.

1° Ce frottement qui ne dépend que de la construction de l'appareil n'est, en général, pas fonction de la pression ou de la température. La sensibilité et la reproductibilité sont en première approximation des constantes pour un appareil donné.

2° L'expérience a montré que, quoique les frottements solides croissent avec la surface courbe du piston, cette fonction croît moins vite que l'augmenta-

tion correspondante de la section du piston, de sorte que le rapport $\frac{2 f_0}{S}$ diminue à section croissante.

On a ainsi avantage à choisir une section du piston aussi grande que possible afin d'augmenter la reproductibilité.

c. Mesure de la sensibilité. — Nous avons vu que la sensibilité d'une balance manométrique est fonction du frottement solide qui se manifeste entre les parois du piston et du cylindre. Sa mesure est simple : il suffira de déterminer l'insensibilité maximum de la balance, c'est-à-dire de déterminer le poids minimum qu'il faut ajouter ou enlever du piston pour que l'on puisse détecter une variation de pression en dessous du piston.

Notons que cette détection nécessite l'emploi d'un dispositif d'équilibre, lequel à son tour introduit une erreur d'équilibrage.

HOLBORN et SCHULTZE (15) faisant usage d'une balance à piston simple et à oscillation, en ont déterminé la sensibilité en opposant l'appareil à une colonne de mercure de 13 mètres, c'est-à-dire à une pression d'environ 17 kg/cm². L'observation du ménisque de mercure fournit un dispositif d'équilibre extrêmement sensible; en effet, on sait évaluer au cathétomètre une variation de hauteur de 0,001 millimètre, c'est-à-dire l'erreur d'équilibrage est de l'ordre de 0,001 millimètre Hg soit environ 0,001 g/cm². La sensibilité observée était de 1 gramme à 17 kg/cm² et de 2 grammes à 100 kg/cm² par comparaison avec une deuxième balance, c'est-à-dire une valeur relative de $\frac{1}{17.000}$ et $\frac{1}{50.000}$.

BEATTIE et BRIDGEMAN (5) et BEATTIE et EDEL (6) ont fait usage d'un dispositif d'équilibre au mercure et à contact électrique. A 250 kg/cm² la sensibilité de leur balance est de $\frac{1}{\pm 0.000}$.

BASSET utilisant un index actionné directement par le piston, mais à grande sensibilité, mesure une sensibilité de 1 kg à 10 000 kg/cm², c'est-à-dire le $\frac{1}{10.000}$.

d. Mesure de la reproductibilité. — MICHELS a effectué des mesures très soignées en vue de déterminer la reproductibilité de sa balance à piston différentiel. Nous avons vu que la reproductibilité d'une balance manométrique est définie par la dispersion des résultats obtenus lors d'une série de mesures d'une même pression bien fixe.

Cet auteur a mis au point un manomètre à hydrogène équipé de contacts électriques et d'un niveau à mercure lequel permet de reproduire une pression fixe avec grande précision. Une augmentation de la charge sur la balance manométrique force du mercure dans un tube en verre, rempli d'hydrogène. La fermeture d'un contact en platine soudé dans la paroi du tube, permet de définir une pression bien fixe, correspondant à la pression de l'hydrogène enfermé au-dessus du niveau à la température du thermostat. Au cours de la mesure l'approche de l'équilibre se fait d'une façon continue et très lente. La charge sur le piston est augmentée par un écoulement d'huile dans un petit réservoir. Cet écoulement est automatiquement arrêté par l'intermédiaire du courant électrique qui passe par le contact en platine au moment où la pression voulue est atteinte.

Les écarts extrêmes entre les valeurs obtenues par la pression, correspondant à un même contact électrique, est de $1,5 \text{ g/cm}^2$; pour la pression de 176 kg/cm^2 atteinte au cours de ce travail il y correspond une reproductibilité de $\frac{1}{120.000}$.

Il ressort également des observations de MICHELS que la reproductibilité est à peu de chose près la même pour différentes pressions s'échelonnant entre 1 et 176 atmosphères et n'est donc pas fonction de la pression.

Plus récemment MICHELS a su porter la sensibilité de sa balance manométrique à $0,5 \text{ g/cm}^2$ déterminée directement avec une colonne à mercure de 27,5 mètres comme HOLBORN et SCHULTZE. Ceci correspond, à cette pression de 30 kg/cm^2 , à $\frac{1}{60.000}$.

CONCLUSIONS. — La reproductibilité d'une balance manométrique, équipée avec un système de réduction des frottements, est très grande. Son erreur absolue est indépendante de la pression et peut être de l'ordre de $\frac{1}{100.000}$.

La mesure de la reproductibilité d'une balance manométrique exige beaucoup de soins et peu d'auteurs s'y sont attachés. On se contente généralement de la mesure de la sensibilité, plus aisée, que l'on substitue à la valeur de la reproductibilité. La sensibilité oscille entre 0,5 et $\nu 3$ grammes pour les appareils soignés, à des pressions allant jusque 500 kg/cm^2 . Elle atteint encore 1 kg pour la balance de BASSET à $10\,000 \text{ kg/cm}^2$. En confondant sensibilité avec reproductibilité, on peut affirmer que l'erreur $\frac{\Delta P_1}{P}$ n'est jamais inférieure à $\frac{1}{10.000}$ pour autant que l'on mesure des pressions supérieures à 50 kg/cm^2 .

§ 3. Détermination de la section effective du piston

Au chapitre précédent nous nous sommes attachés à montrer comment augmenter la reproductibilité et la sensibilité de la balance manométrique, en éliminant les forces parasites non définies, qui agissent sur le piston.

Il convient maintenant d'évaluer :

1° La valeur de la section effective que l'on peut définir d'après la relation :

$$P = \frac{G}{S + A} \text{ ou encore } P = \frac{G}{S_e}, \text{ } S_e \text{ étant la section effective;}$$

2° L'erreur ΔP_2 commise sur la mesure de $\frac{G}{S_e}$, cette détermination devant permettre de calibrer la balance manométrique comme instrument de mesure primaire.

*
* *

Nous avons défini précédemment la section effective par : $S_e = S + a$ où $a \left(= -\frac{f}{P} \right)$ est l'accroissement de la section par suite de l'action des forces définies f . Dans le présent chapitre nous calculerons l'influence des différentes forces définies vis-à-vis de la valeur de a . Nous arriverons ainsi à une expression de la section effective, ou encore du rayon effectif, r_0 défini par la relation $S_e = \pi r_0^2$.

A. ÉCOULEMENT VISQUEUX. — La force principale qui intervient dans la détermination de la section effective S_e provient de l'écoulement du liquide de compression entre le piston et le cylindre. Cet écoulement donne lieu à une force de frottement visqueux qui peut être calculée facilement par application des principes de l'hydrodynamique. Supposons que le piston et le cylindre sont des cylindres coaxiaux parfaits, respectivement de rayon r_1 et r_2 (fig. 13). Imaginons entre ces deux cylindres un feuillet cylindrique, infiniment mince, de liquide. Ce feuillet est soumis des deux côtés à une force de frottement visqueux : $2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} t$ de la part des feuillets de liquide adjacents (cf. formule 8).

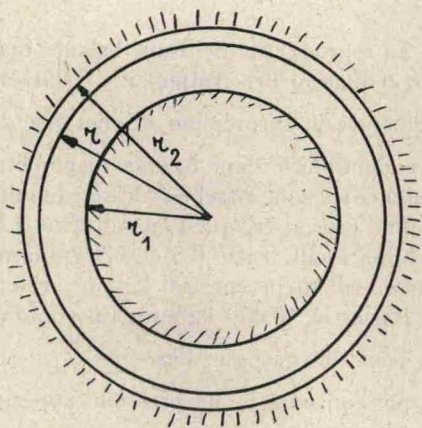


FIG. 13

Pour un régime d'écoulement stationnaire la résultante de ces forces est équilibrée par la poussée hydrostatique. Nous comptons comme positives les forces s'exerçant vers le bas, les forces dirigées vers le haut étant négatives. L'équation d'équilibre pourra donc s'écrire :

$$(14) \quad -P 2\pi r dr = \eta L 2\pi (r + dr) (t + dt) - \eta L 2\pi r t$$

où :

η = viscosité;

L = hauteur du feuillet;

r = rayon;

$t = \frac{dv}{dr}$ (au rayon r) où v = vitesse d'écoulement;

P = pression hydrostatique.

ou encore :

$$-\frac{P}{\eta L} = \frac{rdt + tdr + dt dr}{r dr}$$

en négligeant le produit des infiniments petits :

$$(15) \quad -\frac{P}{\eta L} = \frac{dt}{dr} + \frac{t}{r}$$

par intégration de cette équation on obtient :

$$(16) \quad t = -\frac{Pr}{2\eta L} + \frac{C}{r}$$

appelons r_0 le rayon pour lequel $t = 0$. Alors

$$-\frac{Pr_0}{2\eta L} + \frac{C}{r_0} = 0$$

d'où :

$$(17) \quad r_0 = \sqrt{\frac{2\eta CL}{P}}$$

Pour ce rayon r_0 la force de frottement visqueux sera nulle puisque $\frac{dv}{dr} = 0$ c'est donc précisément le rayon effectif que nous cherchons.

L'écoulement visqueux du liquide entre piston et cylindre a pour résultat d'accroître le rayon du piston de r_1 à r_0 .

La constante C est fixée par les conditions aux limites.

Reprenons

$$(16) \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{Pr}{2\eta L} + \frac{C}{r}$$

après intégration

$$(18) \quad v = -\frac{Pr^2}{4\eta L} + C \log r + K.$$

La vitesse s'annule à la surface du piston et du cylindre, c'est-à-dire $v = 0$ pour $r = r_1$ et $r = r_2$. Donc

$$-\frac{P(r_2^2 - r_1^2)}{4\eta L} = C \log \frac{r_1}{r_2}$$

$$(19) \quad C = -\frac{P}{4\eta L} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}}$$

Introduisons (19) dans (17)

$$(20) \quad r_0 = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_1}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_2}{r_1}}}$$

Cette expression du rayon effectif est identique à celle définie par MEYERS et JESSUP (21).

MICHELS arrive à une valeur du rayon effectif qui diffère de l'expression (20); la différence provient du fait que cet auteur a simplifié le problème en faisant l'hypothèse que les deux parois sont planes et parallèles. Dans ce cas spécial

l'expression (14) se simplifie :

$$-PY dr = \eta LY (t + dt) - \eta LY t$$

Y étant la largeur de la paroi.

Ou encore :

$$-\frac{P}{\eta L} dr = Ct.$$

Par intégration :

$$t = -\frac{P}{\eta L} r + C.$$

Si r_0 désigne de nouveau le rayon pour lequel $t = 0$ on obtient :

$$(21) \quad r_0 = \frac{C\eta L}{P}.$$

L'intégration de

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{P}{\eta L} r - Cr$$

donne lieu à

$$v = -\frac{P}{2\eta L} r^2 + Cr + K$$

v étant = 0 pour $r = r_1$ et $r = r_2$ nous avons :

$$0 = -\frac{P}{2\eta L} (r_2^2 - r_1^2) + C (r_2 - r_1)$$

$$C = \frac{P}{2\eta L} (r_2 + r_1).$$

En introduisant cette valeur dans (21) il suit :

$$r_0 = \frac{r_2 + r_1}{2}.$$

Le rayon effectif est égal à la moyenne arithmétique des rayons du piston et du cylindre. (Signalons que MICHELS arrive à ce même résultat par une méthode différente.)

MEYERS et JESSUP ont montré que l'expression (20) peut être développée en série. Posons

$$\frac{r_2}{r_1} - 1 = x$$

d'autre part

$$\log (1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

Après quelques transformations élémentaires, on trouve

$$(23) \quad \frac{1}{\log(1+x)} = \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_1}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + \frac{x^2}{24}$$

d'où finalement

$$\frac{r_2^3 - r_1^3}{2 \log(1+x)} = r_2 r_1 + \frac{(r_2 - r_1)^2}{6} \dots$$

Pour le deuxième terme, nous admettons que $r_2 + r_1 \approx 2 r_1$.
On obtient pour le rayon effectif :

$$r_{01} = \sqrt{r_2 r_1 + \frac{(r_2 + r_1)^2}{6}}$$

L'expression (22) peut encore s'écrire :

$$r_{02} = \sqrt{r_2 r_1 + \frac{(r_2 + r_1)^2}{4}}$$

D'autres auteurs (KLEIN, en particulier) définissent la section effective comme la moyenne des sections de cylindre et du piston. Ceci équivaut à un rayon effectif :

$$r_{03} = \sqrt{r_2 r_1 + \frac{(r_2 + r_1)^2}{2}}$$

Comme la différence $r_2 - r_1$ est inférieure à $\frac{r_1}{1.000}$, il en résulte que les trois valeurs du rayon effectif diffèrent entre elles de moins de $\frac{1}{1.000.000}$, ce qui est parfaitement négligeable.

On peut donc conclure, que par suite de l'écoulement visqueux autour du piston, le rayon effectif est égal à la moyenne arithmétique des rayons du piston et cylindre.

B. ENFONCEMENT DU PISTON. — Par suite de la fuite du liquide de compression autour du piston celui-ci descend lentement. Ceci a pour résultat que la vitesse du liquide qui s'écoule ne s'annulera pas à la surface du piston; par conséquent la distribution des vitesses et donc également l'expression pour le rayon effectif s'en trouveront modifiées.

La vitesse au rayon r sera toujours donnée par :

$$v = -\frac{Pr^2}{4\eta L} + C \log r + K.$$

Toutefois avec les conditions aux limites $v = 0$ pour $r = r_2$, $v = v_1$ pour $r = r_1$, v_1 étant la vitesse de descente du piston.

On aura encore que :

$$r_0 = \sqrt{\frac{2\eta LC}{P}}$$

La valeur de C s'obtient facilement puisque :

$$-\frac{1}{4\eta L} + C \log r_1 - v_1 = -\frac{Pr_2^2}{4\eta L} + C \log r_2 \quad C = -\frac{P}{4\eta L} \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}} + \frac{v_1}{\log \frac{r_1}{r_2}}$$

D'où finalement pour la valeur de r_0^2

$$r_0^2 = \frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_2}{r_1}} - \frac{2 v_1}{\frac{P}{\eta L} \log \frac{r_2}{r_1}}$$

Comme la surface effective vaut $Se = \pi r_0^2$ on trouve maintenant une différence de :

$$\Delta Se = \frac{2\pi v_1 \eta L}{P \log \frac{r_2}{r_1}}$$

avec la valeur trouvée précédemment.

On peut de nouveau développer en série

$$\frac{1}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

et limitant le développement au premier terme, l'augmentation de la section effective devient :

$$(24) \quad \Delta Se = \frac{2\pi \eta L v_1 r_1}{P(r_2 - r_1)}$$

Cette valeur s'obtient facilement, si l'on connaît la vitesse de descente du piston v_1 en fonction de la pression. Les mesures effectuées par MICHELS montrent que cette fonction est linéaire, avec une grande approximation. Il est toutefois possible de calculer directement v_1 en fonction des rayons r_1 et r_2 .

A condition que la fuite soit due uniquement au liquide qui s'échappe autour du piston on peut écrire $v_1 = \frac{Q}{\pi r_1^2}$ où Q est débit. D'autre part Q est défini par

$$(25) \quad Q = \int_{r_1}^{r_2} v \cdot 2\pi r \, dr.$$

La vitesse v est donnée par (18). A partir de (18) et (19) on détermine la constante K.

$$(26) \quad K = \frac{Pr_2^2}{4\eta L} + \frac{P}{4\eta L} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}} \quad \text{ou} \quad K = \frac{P}{4\eta L} r_2^2 + \frac{P}{4\eta L} \cdot \frac{r_2^2 - r_1^2}{\log \frac{r_1}{r_2}}$$

Après introduction dans (18) on obtient finalement pour la distribution des vitesses :

$$(27) \quad v = \frac{P}{8 \eta L} = (2 r^2 - r_2^2 - r_1^2) \frac{P}{8 \eta L} \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{\log \frac{r_2}{r_1}} \left(\log \frac{r}{r_2} + \log \frac{r}{r_1} \right).$$

Nous pouvons maintenant effectuer l'intégration de l'expression qui donne Q.

$$Q = \frac{-P}{4 \eta L} \left[\int 2 r^3 dr - \int r_2^2 r dr - \int r_1^2 r dr - \int \frac{r_2^3 - r_1^3}{\log \frac{r_2}{r_1}} \cdot \log \frac{r^2}{r_2 r_1} dr \right]$$

et finalement

$$(28) \quad Q = \frac{\pi P r_1^4}{8 L \eta} \left[\left(\frac{r_2^4}{r_1^4} - 1 \right) - \frac{\left(\frac{r_2^3}{r_1^3} - 1 \right)}{\log \frac{r_2}{r_1}} \right].$$

On peut développer en série la partie entre parenthèse en appliquant la formule (21) et on obtient

$$(29) \quad Q = \frac{\pi P r_1 (r_2 - r_1)^3}{6 L \eta} \left[1 + \frac{W}{2 r_1} + \frac{\left(\frac{W}{r_1} \right)^2}{60} + \dots \right]$$

où

$$W = r_2 - r_1.$$

La valeur de $\frac{W}{r}$ est toujours très petite ($< 0,001$) et on peut parfaitement négliger la parenthèse. Donc

$$(30) \quad Q = \frac{\pi P r_1 (r_2 - r_1)^3}{6 \eta L}.$$

On peut par ailleurs montrer facilement que cette expression n'est autre que celle de la fuite, calculée dans le cas de deux parois planes, c'est-à-dire en partant des formules (21).

Introduisons maintenant la valeur de Q ainsi calculée dans l'expression qui donne la vitesse v_1 (25). On obtient alors

$$v_1 = \frac{P (r_2 - r_1)^3}{6 \eta L r_1}$$

c'est-à-dire que la vitesse est bien une fonction linéaire de la pression, ce qui est en accord avec les mesures de MICHELS.

Substituons la valeur de v_1 dans (24). Nous obtiendrons la section effective d'excès directement en fonction de r_1 et de r_2 :

$$(31) \quad \Delta S_e = \frac{\pi (r_2 - r_1)^3}{3}.$$

Comme la section vaut approximativement πr_1^2 , l'erreur relative causée par la descente du piston est donnée par

$$\frac{\Delta Se}{Se} = \frac{(r_2 - r_1)^3}{3 r_1^3}.$$

$r_2 - r_1$ étant d'environ 0,001 millimètre, l'erreur pour un piston de $r_1 = 2$ millimètres sera de l'ordre de 10^{-7} .

Un tel ordre de grandeur est tout à fait négligeable. MICHELS a également évalué l'erreur apportée par la descente du piston par une méthode empirique : il arrive à un ordre de grandeur de 10^{-4} pour sa balance à piston différentiel.

Nous pouvons donc conclure que la vitesse d'enfoncement du piston ne modifie pas le rayon effectif tel qu'il est donné par l'expression (20) :

$$r_0 = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \log \frac{r_2}{r_1}}}.$$

C. MESURE DE LA SECTION EFFECTIVE. — a. *Mesures directes.* — La section effective étant donnée par $Se = \pi r_0^2$, sa mesure revient à la détermination des diamètres du piston et du cylindre. Les méthodes modernes de rectification permettent de réaliser des pistons dont le diamètre est constant sur toute leur hauteur avec une précision de l'ordre de 0,0002 millimètres, la mesure du diamètre étant faite par interférométrie.

Il est beaucoup plus difficile de garder constant le diamètre du cylindre et sa mesure et sa mesure est toujours fort délicate.

KLEIN a essayé de déterminer le diamètre moyen en pesant la quantité de mercure requise pour le remplissage du cylindre jusqu'à une hauteur bien déterminée. BRIDGMAN détermine le diamètre du cylindre de sa balance par comparaison avec des calibres étalons. La précision de telles méthodes ne pourrait être aussi grande que celle atteinte lors de la mesure des pistons. Dans le cas le plus favorable elle sera de l'ordre de $\pm 0,001$ millimètre. Pour un piston de 5 millimètres de diamètre l'erreur commise sur la mesure de Se serait alors de :

$$\frac{2 \times 0,0025}{5} = \frac{2}{5.000} = \frac{1}{2.500}.$$

b. *Mesures indirectes.* — Si l'on veut atteindre une précision plus grande, il faut avoir recours à d'autres méthodes de mesure moins directes.

1° On peut procéder par étalonnage par rapport à une colonne de mercure : cette méthode sera décrite plus loin. Dans ce cas toutefois la balance manométrique devient un appareil de mesure secondaire.

2° MEYERS et JESSUP ont montré qu'il y a moyen de calculer la distance $r_2 - r_1$ en fonction de grandeurs aisément mesurables, telles que le débit de la fuite, le couple de rotation, etc., et que la précision des valeurs ainsi obtenues est comparable à celle fournie par étalonnage à la colonne de mercure.

Nous décrivons brièvement les trois méthodes dont ces auteurs ont fait usage.

α . *Par mesure de la fuite.* — L'expression (30) nous donne la fuite Q en fonction des r_1 et r_2 . Inversement on peut calculer $r_2 - r_1$ à partir de mesures de la fuite Q.

A partir de (30) on obtient

$$(32) \quad r_2 - r_1 = \sqrt[3]{\frac{6L\eta Q}{P\pi r_1}}$$

Cette expression donne directement la valeur de $r_2 - r_1$ connaissant la pression, la viscosité de l'huile, la hauteur du piston et son diamètre.

β . *Par mesure du couple de rotation.* — La distance de $r_2 - r_1$ peut encore être calculée si l'on connaît le couple de forces qu'il faut appliquer au piston pour le faire tourner à vitesse constante.

Le frottement visqueux qui s'exerce sur le piston par suite de la rotation est donné par (8) : $2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$, ou en introduisant la vitesse angulaire : $2\pi r^2 L \eta \frac{d\omega}{dr}$ et le couple correspondant :

$$(33) \quad T = 2\pi r^3 L \eta \frac{d\omega}{dr},$$

ω étant la vitesse angulaire du liquide de compression au rayon r . Après intégration de (33) on obtient :

$$\frac{4\pi r L \eta n}{T} = (r_2 - r_1) \frac{(r_2 + r_1)}{2r_1^2 r_2^2}$$

d'où pour la valeur de $r_2 - r_1$

$$r_2 - r_1 = \frac{4\pi r L \eta n}{T} \cdot \frac{2r_1^2 r_2^2}{r_2 + r_1}$$

Le dernier facteur dans cette expression peut être simplifié si l'on suppose que la différence des diamètres du piston et du cylindre est très petite.

Et finalement :

$$r_2 - r_1 = \frac{4\pi r L \eta n r_1^3}{T}$$

Cette expression donne la valeur de $r_2 - r_1$ en fonction du couple T qu'il faut appliquer au piston pour le faire tourner à vitesse constante.

γ . *Par mesure de la décélération.* — Il a été montré qu'aussi longtemps que la vitesse de rotation du piston est supérieure à une certaine vitesse critique, les frottements sont du type visqueux. Si le piston tourne librement, par la seule inertie du système, son azimuth en fonction du temps est donné par l'expression suivante

$$(12) \quad \theta = \frac{\omega_1 I}{a} \left(1 - l^{-\frac{a}{I}(t_2 - t_1)} \right) + \theta_1.$$

En désignant par θ_2 l'angle parcouru à l'instant t_2 on peut écrire cette équation sous la forme suivante :

$$(12') \quad \theta_2 - \theta_1 = \frac{\omega_1 l}{a} \left(1 - e^{-\frac{a}{l}(t_2 - t_1)} \right).$$

Soit θ_3 l'angle parcouru en temps t_3 de façon à ce que $t_3 - t_2$ soit égal à $t_2 - t_1$. On peut exprimer a sous la forme :

$$(35) \quad a = \frac{l}{t_2 - t_1} \log \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}.$$

D'autre part les équations (33) et (34) conduisent à

$$(36) \quad a = \frac{2\pi L \eta r_1^3}{r_2 - r_1}.$$

En combinant (35) et (36) il suit

$$(37) \quad r_2 - r_1 = \frac{2\pi L \eta r_1^3 (t_2 - t_1)}{l \log \frac{\theta_3 - \theta_2}{\theta_2 - \theta_1}}.$$

Cette équation permet de calculer $r_2 - r_1$ en mesurant à des temps t_1 , t_2 et t_3 , l'azimut du piston tournant librement à une vitesse supérieure à la vitesse critique.

Cette expression fournit donc une méthode de mesurer la valeur de la section effective qui est plus simple que celle employée par MICHELS.

§. *Résultats expérimentaux.* — MEYERS et JESSUP ont appliqué les trois méthodes de calcul à la détermination de la section effective des pistons de six balances manométriques du Bureau of Standards. Ce sont des appareils à piston simple à rotation continue et d'une limite supérieure de quelque 200 kg/cm².

1° Pour mesurer la *fuite d'huile* une petite quantité de coton absorbant est placée autour de la partie supérieure du piston. La quantité d'huile absorbée s'obtient par simple pesée du tampon de coton après un temps déterminé, de l'ordre d'une dizaine de minutes.

2° *Le couple de rotation* qu'il faut appliquer au piston pour le faire tourner à vitesse constante peut être évalué en intercalant entre le mécanisme moteur et le piston, des ressorts calibrés. MEYERS et JESSUP font remarquer que ces résultats ne sont pas très précis du fait que la vitesse du moteur n'est pas constante. Il se peut également que le couple moteur soit fonction de l'azimut du piston, par suite de frottements solides parasites.

3° La mesure du *frottement visqueux* à vitesse décroissante s'obtient facilement par des observations de la position du piston à des intervalles de temps réguliers comme l'indique l'équation (37).

La tableau comparatif suivant montre les résultats obtenus pour la largeur moyenne de la distance entre le piston et le cylindre d'une balance mano-

métrique. Les mesures ont été effectuées sous différentes pressions et par les trois méthodes décrites ci-dessus numérotées 1, 2 et 3.

Balance M. 2 — A					
Largeur de la distance $r_2 - r_1$ en μ					
MÉTHODE	CHARGES SUR LE PISTON EN KG				
	21	41	61	81	101
1.....	1,4	1,3	1,2	1,1	1,1
1.....	—	1,4	1,3	1,3	#
2.....	1,3	1,8	0,8	0,6	#
1.....	1,7	1,7	1,6	1,5	#
3.....	0,8	0,7	0,5	0,8	#
1.....	2,0	—	—	1,8	#
3.....	0,8	0,9	0,9	0,9	#

MEYERS et JESSUP ont également étalonné leurs balances manométriques avec une colonne à mercure; ils en ont conclu que la section effective, obtenue par mesure directe, est légèrement supérieure à la valeur d'étalonnage. Toutefois, les mesures de décélération conduisent à des résultats dont la précision est équivalente à celle de la colonne à mercure, c'est-à-dire à des erreurs inférieures à $\frac{2}{10.000}$.

Les mesures déduites de la fuite d'huile sont un peu moins précises. Il a été montré ainsi que les méthodes directes pour le calcul de la section effective, préconisées par MEYERS et JESSUP, sont d'une précision comparable à l'étalonnage par colonne à mercure, tout en ayant l'avantage d'être très simples et facilement applicables.

Il serait utile toutefois de les vérifier également sous des pressions plus élevées.

D. INFLUENCE DES DÉFORMATIONS. — Une balance manométrique peut fonctionner sous des pressions très élevées, allant jusqu'à 13 000 kg/cm² (BRIDGMAN). Il est évident que les matériaux dont sont faits le piston et le cylindre, ne peuvent subir de telles pressions sans se déformer.

La déformation du piston entraîne une variation de sa section S, tandis que celle du cylindre influe sur la valeur de $r_2 - r_1$, c'est-à-dire sur la correction α .

Enfin, l'effet simultané des deux déformations est de supprimer le parallélisme des deux parois, ce qui altère la distribution des vitesses du liquide qui s'écoule, et agit ainsi également sur la valeur de la section effective.

Les équations développées précédemment ne sont donc valables que pour autant que les déformations du piston et du cylindre soient négligeables. La figure 14 montre d'une façon exagérée les déformations dans le cas d'un piston simple et du piston différentiel.

Le calcul de ces déformations est basé sur le fait qu'il existe un gradient de pression entre piston et cylindre, la pression décroissant depuis la valeur P sous le piston jusqu'à la pression atmosphérique p .

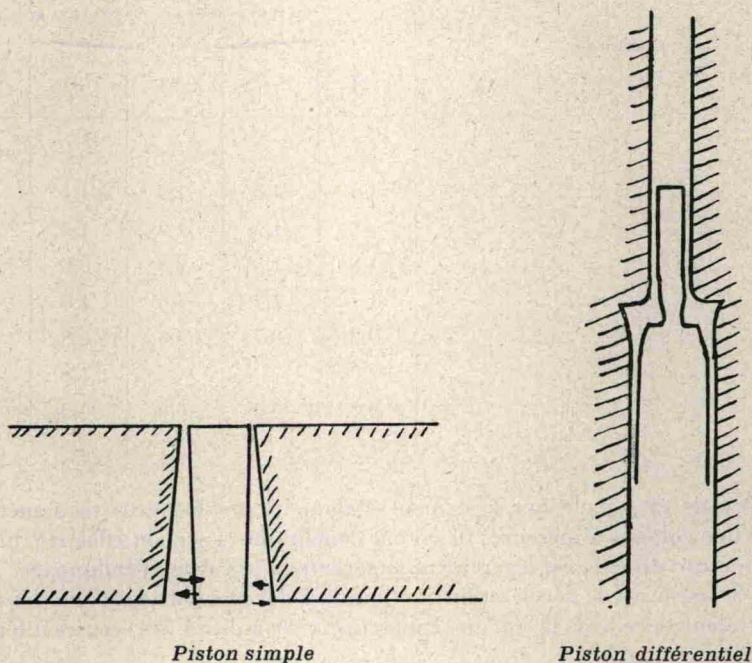


FIG. 14

Le calcul exact de ces déformations constitue un problème mathématique complexe. On peut toutefois, grâce à des hypothèses simplificatrices et par l'application des principes habituels de la résistance des matériaux, calculer l'ordre de grandeur de ces déformations.

Deux cas particuliers de tels calculs sont donnés dans la littérature : ils sont longs et n'offrent qu'un intérêt limité. Aussi nous bornerons-nous à en donner les résultats.

α . MICHELS pour sa balance à piston différentiel évalue trois déformations :

1° Un allongement de la partie inférieure du piston par la traction des poids, conduisant à une augmentation du diamètre effectif de $\frac{3}{2,2 \cdot 10^7} \cdot P$.

2° Une compression du piston, diminuant le diamètre effectif de $\frac{3}{2,2 \cdot 10^7} \cdot P$.

3° Une déformation du cylindre, laquelle en combinaison avec les deux autres déformations conduit à une augmentation de la valeur de $r_2 - r_1$ et un accroissement du diamètre effectif de $\frac{P}{2,5 \cdot 10^6}$. Soit au total une augmentation de $\frac{P}{4,6 \cdot 10^6}$. A 200 atmosphères, la correction est alors de $\frac{1}{23.000}$. Il ressort de ce calcul que la section effective devient une fonction de la pression, mais que toutefois la correction est négligeable sous une pression peu élevée.

β . BRIDGMAN arrive à un résultat analogue par un raisonnement différent. Son calcul s'applique à un appareil d'un type particulier, construit spécialement pour très hautes pressions et dans lequel le cylindre est soumis à une forte pression extérieure. L'auteur schématise la déformation totale comme suit :

1° Une augmentation du diamètre effectif de $1,4 \times 10^{-7} \times R \times P$ due à une compression longitudinale du piston par suite de la pression hydrostatique et des poids;

2° Une déformation du piston due au gradient de pression provoquant une diminution du diamètre effectif à la partie inférieure du piston de : $2,1 \times 10^{-7} \times R \times P$;

3° Une variation du diamètre du cylindre à sa partie inférieure de $-5,3 \times 10^{-7} \times b \times P$, due au fait que le cylindre est soumis à l'extérieur à une pression $1,32 P$, et à l'intérieur au même gradient que le piston.

Finalement, de toutes ces variations de diamètre il résulte une augmentation de la section effective du piston de $1,18 \times 10^{-7} \times P$. Cette relation est du même ordre de grandeur que celle obtenue par MICHELS : ainsi à 1 000 kg/cm² la correction serait de l'ordre de $\frac{1}{10.000}$.

γ . BASSET (4) afin de compenser les variations de diamètre du piston par suite du gradient de pression le long des parois du cylindre, réalise des pistons initialement non cylindriques de manière à assurer un certain jeu fixé d'avance et un diamètre aussi constant que possible. Cet auteur admettant empiriquement une loi de décroissance de la pression le long des parois du piston, calcule pour chaque pression la variation du diamètre du piston par rapport à sa dimension initiale. En réalisant des pistons d'après ce mode de calcul, il a pu atteindre une précision de $\frac{1}{5.000}$ jusqu'à 10 000 atmosphères.

δ . L'influence de la pression sur la section effective a également fait l'objet de plusieurs recherches expérimentales, au cours desquelles, on a mesuré la section effective à différentes pressions, par étalonnage direct avec une colonne à mercure (la technique de cet étalonnage sera décrite en annexe).

Parmi ces travaux, citons ceux de :

1° HOLBORN et SCHULTZE (15) qui trouvent que jusqu'à 100 atmosphères la pression ne modifie pas la section effective, avec une précision de $\frac{1}{30.000}$;

2° CROMMELIN et SMID (10) ne sont pas du même avis et croient devoir adopter une fonction de pression assez complexe. Leurs résultats toutefois sont contestés par MICHELS, qui, à la suite de mesures très soignées n'a observé aucune influence de la pression sur la section effective jusqu'à 176 atmosphères ;

3° KEYES (17) signale qu'à partir de 400 atmosphères un effet de déformation, dû à la pression, se manifeste;

4° Enfin, BEATTIE et EDEL (6) mentionnent que jusqu'à 540 atmosphères la surface active ne dépend pas de la pression.

En conclusion, et conformément aux calculs de MICHELS et BRIDGMAN, l'effet de la pression, et corrélativement celui des déformations sont trop faibles pour être observés pour des pressions n'excédant pas 600 kg/cm². Au-delà de cette limite, il faut toutefois apporter des corrections déterminées soit par étalonnage, soit par calcul.

E. VIEILLISSEMENT. — Le matériau dont est fait l'appareil est sujet à un vieillissement qui altère les dimensions du piston et du cylindre.

BEATTIE et BRIDGEMAN (5), ont mesuré sur la balance du Massachusetts Institute of Technology une diminution moyenne du diamètre actif de :

0,055 % pendant les 4 premières années;

0,035 % pendant les 4 années suivantes.

MEYERS et JESSUP (21) signalent également des variations de la section effective du même ordre avec le temps.

F. CONCLUSIONS. — Ayant calculé l'expression qui donne la section effective et les erreurs correspondantes, nous résumerons brièvement les résultats obtenus; on connaîtra ainsi l'erreur $\frac{\Delta P_2}{P}$ qu'entraîne la mesure du rapport $\frac{G}{S_e}$.

a. *Erreurs sur les poids.* — G peut être défini avec grande précision; ainsi MICHELS signale qu'un poids de 50 kg peut être pesé à un 0,5 g près, c'est-à-dire une erreur relative de $\frac{1}{100.000}$. Un tel ordre de grandeur est tout-à-fait négligeable vis-à-vis des autres causes d'erreurs. Comme le poids dépend de la gravitation, il faut tenir compte éventuellement de la valeur de la constante de gravitation pour la comparaison des résultats obtenus en différents endroits de la terre.

b. *Erreur sur la section effective.* — Elle est définie comme la section correspondant au rayon effectif r_0 .

1° Le frottement visqueux causé par la fuite du liquide de compression autour du piston, conduit à un rayon effectif égal à la moyenne arithmétique des rayons du piston et du cylindre $r_0 = \frac{r_2 + r_1}{2}$ (22).

2° Le frottement supplémentaire causé par l'enfoncement du piston, est très faible; il entraîne une erreur que l'on évalue, par calcul, comme étant de l'ordre du $\frac{1}{10.000.000}$ pour un piston cylindrique de 2 mm de diamètre et que MICHELS estime inférieure au $\frac{1}{10.000}$ dans le cas le plus défavorable.

3° Sous l'effet de la pression, le cylindre et le piston se déforment jusqu'à 500 kg/cm²; l'erreur due à cet effet est inférieure au $\frac{1}{10.000}$. Pour des plus fortes pressions, il faut apporter à la section effective une correction déterminée soit par le calcul, soit par l'étalonnage.

On peut conclure que le rayon effectif est correctement donné par l'expression $r_0 = \frac{r_2 - r_1}{2}$ (22) avec une erreur qui est inférieure au $\frac{1}{10.000}$ à condition de tenir compte de la correction de déformation.

La mesure du rayon effectif peut se faire de différentes façons :

1° Par mesure directe des rayons du piston et du cylindre conformément à l'équation (22). Nous avons mentionné que par suite de l'imprécision sur la mesure du cylindre l'erreur à laquelle conduit cette méthode est de l'ordre de $\frac{1}{2.500}$.

2° En écrivant l'équation (22) sous la forme $r_0 = r_1 + \frac{r_2 - r_1}{2}$ on voit que la mesure de la section effective revient à la mesure du diamètre du piston et de la valeur de $r_2 - r_1$. Cette dernière valeur peut être obtenue avec grande précision par des mesures de décélération ou de la fuite. La précision dans ce cas est de l'ordre de $\frac{1}{5.000}$, et peut atteindre $\frac{1}{10.000}$.

En conclusion : l'erreur $\frac{\Delta P_2}{P}$ commise sur la mesure *directe* du rapport $\frac{G}{S_e}$ se situe aux environs du $\frac{1}{5.000}$ et atteint le $\frac{1}{10.000}$ dans les cas les plus favorables. Elle est supérieure à l'erreur $\frac{\Delta P_1}{P}$ (manque de reproductibilité) et conditionne dans une large mesure la précision de la balance manométrique.

Pour obtenir une meilleure précision, on peut opposer la balance manométrique à une colonne à mercure et déduire la section effective de la pression du mercure et des poids chargés sur le piston. Par cette méthode, on apporte automatiquement toutes les corrections nécessaires mais la balance manométrique devient un appareil de mesure secondaire étalonné par rapport à la colonne de mercure, étalon primaire.

§ 4. Dispositif de repérage d'équilibre

Nous avons déjà mentionné que dans le cas de la mesure d'une pression inconnue fixe, la balance manométrique doit être munie d'un dispositif permettant de détecter l'équilibre entre la pression inconnue et la pression équilibrante.

Au cours d'une telle mesure, une condition fondamentale doit être observée : la pression établie à la balance manométrique ne peut changer la pression inconnue, en d'autres mots il faut que le volume du fluide comprimé reste rigoureusement constant au cours de la mesure. Ceci peut être obtenu par un dispositif d'équilibre.

1° Le moyen de repérage le plus simple consiste à fixer un *repère* au piston de la balance manométrique. La mesure devra se faire de façon telle que ce repère reste à une même hauteur assurant ainsi la constance du volume. Inversement, à un déséquilibre de pression dP , il correspondra une variation de volume dV et un déplacement L de l'index.

La sensibilité de cette méthode dépend de la plus petite variation de la hauteur observable à l'index; elle peut être rendue très grande par l'emploi d'un

microscope. La sensibilité dépend également du volume et de la compressibilité du fluide à l'étude.

Exemple : soit une enceinte de volume V contenant un gaz parfait à la température T . Il y correspond une pression $P = \frac{nRT}{V}$. Supposons que le poids en excès sur le piston de la balance manométrique modifie la pression de dL . La variation de volume correspondante vaut : $dV = \frac{dP \cdot nRT}{P^2}$. Pour un piston de section S le déplacement vertical sera donné par $dL = -\frac{dP \cdot nRT}{S \cdot P^2}$.

Dans le cas d'un fluide réel, β étant le coefficient de compressibilité défini par $-\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dP}$, $dL = -\frac{dP}{S} \cdot V\beta$ d'où $\Delta P_{(3)} = \frac{L \cdot S}{V \cdot \beta}$.

Exemple : soit $V = 1\,000 \text{ cm}^3$, $\beta = 0,0002$ pour l'huile et $S = 1 \text{ cm}^2$. Si la plus petite distance observable à l'index est de $0,01 \text{ cm}$, on aura :

$$\Delta P_{(3)} = \frac{L \cdot S}{V \cdot \beta} = 0,05 \text{ kg/cm}^2.$$

La méthode de l'index toutefois présente un grand inconvénient. En effet, par suite de la fuite d'huile autour du piston, celui-ci s'enfonce dans le cylindre et l'index suit le mouvement de descente. Notons que les balances manométriques de BASSET (4) et du Bureau of Standards (21) sont munies d'un index de repérage.

2° *Manomètre différentiel*. — Afin d'éviter les défauts de la méthode décrite ci-dessus, plusieurs auteurs ont préconisé l'emploi d'un manomètre différentiel pour la détection d'un déséquilibre entre la pression inconnue et la pression d'équilibre. Les deux pressions sont appliquées sur les deux branches d'un tube manométrique rempli de mercure, la dénivellation des ménisques étant repérée d'une façon précise par l'emploi de deux contacts électriques.

Un tel dispositif a été mis au point par BEATTIE et BRIDGEMAN et BEATTIE et EDEL. Avec des contacts en platine, il est possible de détecter facilement une dénivellation des ménisques de mercure de $0,1 \text{ mm}$, l'erreur correspondante est dans ce cas de l'ordre 10^{-5} à 100 kg/cm^2 .

Comme l'erreur relative d'équilibrage peut être rendue négligeable en comparaison de l'erreur relative sur la reproductibilité, la conclusion précédente, signalant que c'est l'erreur sur la mesure de la section effective qui limite la précision de la balance manométrique, n'est donc en rien modifiée.

§ 5. Quelques types de balances manométriques

Dans ce chapitre, nous décrirons brièvement quelques balances manométriques les plus représentatives, uniquement dans le but de montrer comment leurs auteurs ont mis en pratique les principes que nous avons passés en revue. Dans cette rapide description ne sont pas comprises les différentes balances manométriques actuellement fabriquées par divers constructeurs, balances inspirées des appareils décrits succinctement ici.

A. BALANCE DU BUREAU OF STANDARDS. (MEYERS et JESSUP). — Cet appareil constitue un exemple typique de balance manométrique de grande précision destinée à des mesures de pressions relativement basses allant jusqu'à 100 atmosphères au maximum.

Le cylindre se compose de deux parties : une enveloppe en acier doux est frettée sur une buselure en acier trempé, rectifiée intérieurement et destinée à recevoir le piston. Une capsule en acier fixée sur le manchon extérieur ferme le cylindre à sa partie inférieure. Le piston en acier au carbone ou en acier spécial au chrome est rectifié et rodé sur le cylindre, la surface de contact avec le cylindre ayant une hauteur de 7 cm. Les poids sont chargés sur un plateau fixé à une barre en acier. Cette barre, bien guidée sur toute sa longueur repose sur une bille au fond du piston évidé, et transmet ainsi la charge à celui-ci.

Les frottements entre piston et cylindre sont éliminés par rotation du piston. A cette fin un petit moteur démultiplié par une vis sans fin actionne une roue dentée montée sur le bâti de l'appareil. Le mouvement est transmis au plateau à poids à l'aide de ressorts très flexibles de sorte à ne pas gêner le mouvement du piston dans le sens vertical.

La balance manométrique est munie d'un robinet d'admission et d'une pompe d'injection qui permet d'équilibrer la pression inconnue. La position du piston peut être déterminée par l'observation des positions relatives d'un trait gravé sur la barre de transmission et d'une marque sur le guide. Sur l'embase de l'appareil est monté un manomètre différentiel à mercure qui sert de séparateur et de dispositif d'équilibre très sensible.

Nous avons signalé qu'au point de vue de la reproductibilité et de la détermination de la section effective, il est préférable d'avoir un piston de grand diamètre. Par contre, à section croissante le poids à charger sur le piston augmente rapidement, ce qui constitue un désavantage. En pratique, on adopte une solution de compromis en choisissant des diamètres maxima compatibles avec une région de pression définie.

Le piston de la balance manométrique du Bureau of Standards a une section de 11, 2 mm pour une pression maximum de 100 atmosphères. La même balance peut être équipée d'un piston de 35,67 mm pour la mesure de pressions allant jusqu'à 10 atmosphères. La mesure du diamètre du piston est faite par interférométrie à 0,0002 mm près. La section effective déterminée soit par des mesures directes (méthode de MEYERS et JESSUP) ou encore par étalonnage avec le manomètre à mercure du Bureau of Standards.

La précision maximum de l'appareil est du 10 000^e.

B. BALANCE DU MASSACHUSETTS INSTITUTE OF TECHNOLOGY (*Physical Chemistry Research Laboratory*). — Ce type de balance manométrique, dont la construction a été constamment améliorée depuis 1910 couvre un domaine de pressions allant de quelques atmosphères à 1 200 atmosphères.

Le piston en acier trempé est muni à son extrémité supérieure d'un roulement à billes sur lequel s'appuie le plateau à poids. Le cylindre est fixé dans un bloc central, le joint étant assuré par une rondelle en aluminium recuit.

L'appareil peut être équipé de quatre combinaisons piston-cylindre de diamètres différents : il est ainsi possible d'obtenir une sensibilité uniforme dans

toute l'échelle des pressions tout en évitant l'emploi de poids excessifs lors de la mesure de pressions élevées.

L'élimination des frottements entre piston et cylindre est obtenue par oscillation du piston. A cette fin, une pièce métallique est fixée perpendiculairement au piston qui est soumis à un mouvement de va-et-vient, à raison de 30 oscillations par minute.

Cette balance manométrique, équipée du dispositif d'équilibre de haute précision décrit plus avant, a été employée par KEYES et ses collaborateurs pour faire une étude poussée des propriétés thermodynamiques de l'ammoniaque et de la vapeur d'eau. La précision est de $\frac{1}{40.000}$ jusqu'à 150 atmosphères et atteint $\frac{1}{10.000}$ entre 500 et 1 000 atmosphères.

C. BALANCE DE A. MICHELS. — Les balances en usage au van der Waals Laboratorium à Amsterdam ont été conçues, étudiées et mises au point par le professeur A. MICHELS. Dans les chapitres précédents, nous avons exposé en détail les théories sur lesquelles cet auteur s'est appuyé pour créer un type de balance qui, à l'heure actuelle, peut être considérée comme étant celui donnant les indications les plus précises jusqu'à 3.000 kg/cm² : aussi nous contenterons-nous d'en donner ici une description très succincte.

Cette balance est, comme nous l'avons déjà vu, du type à piston différentiel; afin d'atteindre la plus haute précision possible, elle est équipée, en ce qui concerne les prototypes les plus récents, de sept ensembles cylindre-piston. Les poids sont accrochés au piston de manière à éliminer toute déformation de ce dernier par compression.

L'élimination des frottements entre le piston et le cylindre est réalisée par la rotation libre du piston : celle-ci est obtenue par l'entraînement préalable du piston au moyen d'une poulie actionnée par moteur, cet entraînement mécanique étant débrayé au moment des mesures. Comme les poids sont directement suspendus au piston, celui-ci poursuit sa rotation libre pendant un temps suffisamment long pour permettre d'effectuer les mesures sans devoir embrayer à nouveau la poulie d'entraînement.

Nous avons donné plus avant des indications sur la précision, la sensibilité et la reproductibilité des balances créées par le professeur MICHELS; nous ajouterons simplement que dans les balances couramment en usage au van der Waals Laboratorium, la friction entre pistons et cylindres est généralement inférieure à 1 gramme et que la perte d'huile à 1 000 kg/cm² est moindre que 2 cm³ par heure.

D. BALANCE DU PROFESSEUR P. W. BRIDGMAN (HARVARD). — Les types d'appareil que nous venons de décrire fonctionnent convenablement jusqu'à 2 000 à 3 000 atmosphères. Au-delà de cette limite la pression provoque dans ces types de balances une déformation considérable du cylindre et du piston au point de rendre toute mesure impossible⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Signalons toutefois que l'utilisation de pistons et de cylindres en carbure de tungstène permettent de mesurer des pressions s'étendant jusque 10 000 atmosphères avec des dispositifs classiques.

BRIDGMAN a mis au point un type de balance manométrique construite de façon à éviter l'inconvénient que nous venons de mentionner et permettant la mesure de pressions s'étendant jusqu'à 13.000 kg/cm².

Le cylindre a ici une forme particulière et est maintenu à l'aide d'un boulon et d'un anneau en acier doux à crête conique qui fait office de joint. Notons que l'endroit où se fait le joint est placé bien au-dessus de la partie utile du cylindre, destinée à recevoir le piston. Le but de cet arrangement est de soumettre l'extérieur du cylindre à la pression hydrostatique et d'éviter ainsi une dilatation ou une rupture de la paroi. Toutefois, comme la pression à la paroi interne du cylindre décroît linéairement le long du piston, la paroi est soumise à un excédent de pression venant de l'extérieur. Il en résulte qu'à pression croissante, le diamètre du cylindre a tendance à diminuer, causant ainsi une diminution de la fuite d'huile entre le piston et le cylindre. On peut craindre qu'à très haute pression la balance ne devienne inutilisable par suite de la fermeture complète de l'espace entre le piston et le cylindre : le professeur BRIDGMAN estime que cette limite est située vers 15.000 kg/cm² mais fait remarquer que, de toute façon, l'appareil ne résisterait pas à une telle pression.

En outre, aux pressions élevées, le cône a tendance à fluer et il transmet alors une pression hydrostatique locale considérable qui peut provoquer un sérieux rétrécissement du cylindre : cet effet n'a toutefois aucune conséquence néfaste puisqu'il s'exerce en dehors de la partie utile du cylindre.

La balance manométrique de BRIDGMAN est remarquable également par l'emploi d'un piston de très petit diamètre : 1,59 mm. Le poids nécessaire à l'équilibrage du piston peut ainsi être maintenu dans les limites raisonnables pour une pression de l'ordre de 10.000 kg/cm² par exemple, le poids est de 200 kg environ.

Le cylindre est construit en acier au nickel à limite élastique élevée; le piston est directement découpé dans une barrette d'acier calibré (silver steel). L'ajustage final est obtenu par un rodage soigneux du piston dans le cylindre.

La balance manométrique de BRIDGMAN est capable d'une précision de 1 kg/cm², de sorte qu'à 10.000 kg/cm², la précision est de l'ordre du $\frac{1}{10.000}$.

Remarquons encore que cet appareil a servi d'étalon primaire pour toutes les mesures de BRIDGMAN et que l'échelle de pressions de 3 à 13.000 atmosphères qu'elle permet de définir est maintenant adoptée par la plupart des chercheurs.

ANNEXE

ÉTALONNAGE

§ 1. Précision de la méthode

En conclusion du § 3 du chapitre II, nous avons pu montrer que dans une large mesure, la précision d'une balance manométrique était limitée par l'erreur commise sur la mesure de la section effective, et que la mesure pouvait en être faite au $\frac{1}{5.000}$ et exceptionnellement dans les cas les plus favorables au $\frac{1}{10.000}$ près. Si l'on veut atteindre une meilleure précision, il faut procéder à l'étalonnage de la balance manométrique avec une colonne de mercure.

Si l'on oppose à une balance manométrique, une colonne de mercure produisant une pression P et si G est le poids équilibrant cette pression, on a la relation $P = \frac{G}{S_e}$: la section effective est donc déterminée à partir de P et G .

A quelle précision peut-on arriver par cette méthode? L'erreur sur la section effective sera donnée par la somme des erreurs commises sur la mesure de G et de P .

1. L'erreur sur le poids G est très petite et de l'ordre de 10^{-5} en valeur relative.

2. La pression établie par la colonne de mercure est donnée par $P = L\rho$; où L est la hauteur de la colonne et ρ , la densité du mercure. Deux causes d'erreurs sont donc à envisager. En outre, il faut tenir compte des erreurs provenant du manque de reproductibilité de la balance manométrique.

a. La mesure de la hauteur L peut être faite avec grande précision. MICHELS (24) fait usage d'un long ruban en invar étalonné mètre par mètre au moyen d'une copie du mètre étalon du Bureau International des Poids et Mesures. La copie peut être faite avec une erreur de l'ordre de 10^{-6} et l'étalonnage du ruban est susceptible de la même précision. La mesure de la hauteur comporte deux visées des ménisques de mercure au cathétomètre. On peut estimer que l'erreur sur la mesure de la hauteur est de l'ordre de 10^{-5} .

b. La densité du mercure est fonction de P puisque le mercure est soumis à un gradient de pression. Cette influence toutefois semble négligeable; aucun auteur n'en tient compte.

La densité dépend également de la température. Le coefficient de dilatation cubique du mercure étant de 0,0002 une variation de 1 degré cause une variation de densité de $\frac{1}{5.000}$.

Du fait que la température d'une haute colonne de mercure n'est jamais uniforme, on est obligé de déterminer la température moyenne ce qui n'est pas chose facile. HOLBORN et SCHULTZE (15) estiment qu'il est difficile de connaître la température moyenne à 0,5 degré centigrade près. Plus récemment MICHELS (23) a atteint une précision de 0,1 degré centigrade ce qui peut être considéré actuellement comme une limite. Dans ce dernier cas l'erreur sur la densité est de $\frac{1}{50.000}$.

c. En opposant une balance manométrique à une colonne de mercure, il s'introduit une erreur causée par le manque de reproductibilité. Sa valeur est donnée par la reproductibilité ou la sensibilité de la balance manométrique ΔP_2 qui est de 0,5 g/cm² pour l'appareil à piston différentiel de MICHELS. La valeur relative de cette erreur dépend de la hauteur de la colonne et par exemple lors de l'étalonnage de la balance manométrique de MICHELS avec la colonne du Westertoren (Amsterdam) de 27,5 mètres, l'erreur vaut $\frac{1}{80.000}$.

Lorsqu'on compare ces différentes causes d'erreurs, on constate que la sensibilité et la mesure de la température sont des facteurs importants. Or, en principe on sait diminuer la première de ces erreurs ($\frac{\Delta P_1}{P}$) en augmentant P, c'est-à-dire en choisissant une plus haute colonne. Il serait toutefois inutile de vouloir trop réduire cette erreur par rapport à l'erreur sur la température. Pour une sensibilité de 0,5 g/cm² par exemple une colonne de 30 m suffirait amplement puisqu'elle réduit l'erreur de sensibilité à 10⁻⁵.

En dernière analyse, pour une colonne de hauteur suffisante, c'est la mesure de la température moyenne de la colonne de mercure qui limite la précision de l'étalonnage.

Pour tout travail de grande précision la section effective de la balance manométrique doit être mesurée par étalonnage. Cette méthode présente, outre sa grande précision, l'avantage d'inclure dans les mesures, des corrections dues au frottement liquide, chute du piston et déformations. Quant à ce dernier point, à savoir la détermination de la surface de la section effective à haute pression, une technique spéciale, que nous décrirons plus loin, permet d'y arriver.

§ 2. Appareillage

A. ÉTALONNAGE SIMPLE. — Nous décrirons brièvement l'appareil d'étalonnage installé par MICHELS au Westertoren à Amsterdam (24). La colonne a 26,5 m de hauteur et est entourée d'une caisse en bois de 30 × 50 cm.

Le mercure est contenu dans un tube en acier de 11 mètres de diamètre, doublé d'un court tube en verre au sommet pour permettre l'observation du ménisque au cathétomètre. L'autre ménisque directement en contact avec l'huile qui transmet la pression est observable au travers des parois d'un tube en verre très épais.

La hauteur de la colonne de mercure est mesurée à l'aide d'un ruban en invar et de deux cathétomètres. Le ruban est suspendu au moyen d'une poulie en bronze et chargé d'un poids de 10 kg à sa partie inférieure.

La température moyenne peut être déterminée à l'aide d'une série de thermomètres placés de mètre en mètre sur toute la longueur de la colonne. Toutefois, s'inspirant des travaux de HOLBORN (12 et 15), MICHELS a préféré employer un thermomètre secondaire : la température moyenne étant calculée à partir de la résistance d'un fil de platine enroulé autour de la colonne. Il semble que par cette méthode la température moyenne puisse être évaluée à 0,1 degré centigrade.

La reproductibilité des étalonnages faites avec cette installation atteint le $\frac{1}{10.000}$, la balance manométrique employée ayant une sensibilité de 0,5 g.

B. ÉTALONNAGE SOUS PRESSION. — Quelques auteurs ont décrit des techniques d'étalonnage qui permettent de déterminer expérimentalement la variation de la section effective avec la pression : les descriptions succinctes données ci-après permettront de se rendre compte des difficultés à surmonter au cours de telles mesures et également de la précision des mesures.

1° D'après HOLBORN et SCHULTZE (15) il est possible de faire un étalonnage sous pression si l'on dispose de deux balances manométriques agencées de la façon suivante : la première balance est connectée avec un cylindre à gaz comprimés et avec le tube court d'un manomètre à mercure. La partie supérieure du long tube qui a 12 mètres de hauteur est connectée à un deuxième cylindre à gaz et une deuxième balance.

On commence par déterminer le rapport des sections effectives des deux balances en les mettant en opposition et en déterminant les poids à charger sur les pistons pour les maintenir en équilibre.

On établit ensuite sous les deux pistons, et à l'aide de cylindres à gaz, une différence de pression de 17 kg/cm² correspondant à la hauteur de la colonne de mercure. On mesure la section d'une des balances par rapport à l'autre et on détermine ensuite le rapport des sections à la pression de 17 kg/cm² en mettant les deux balances en communication. On recommence l'opération en augmentant la pression par tranches de 17 kg/cm² et on obtient ainsi la section effective des deux balances manométriques de proche en proche.

Le manomètre à mercure qui fut employé par HOLBORN et SCHULTZE se compose de trois tubes en acier d'un diamètre intérieur de 6 millimètres et un diamètre extérieur de 10 millimètres, ces tubes étant connectés par des joints en cuir. La branche courte était en verre d'un diamètre de 2 millimètres et entourée d'un manchon en acier. Les deux ménisques étaient observés au moyen de tubes capillaires doublant les deux branches du manomètre.

La température fut mesurée à l'aide d'un fil de platine de 0,2 millimètre d'épaisseur isolé à la soie et enroulé autour du tube en fer. La précision des mesures fut de $\frac{1}{10.000}$ et aucune variation de la section effective avec la pression ne fut observée.

2° Citons également la colonne du Reichsanstalt, modifiée par KEYES et DEWEY (19). Cette colonne d'une hauteur de 8,75 mètres fut équipée de

manière à repérer la hauteur des ménisques par des contacts électriques et aussi de connecter alternativement deux balances avec le sommet ou la base de la colonne. Un tel système présente l'avantage d'éviter la comparaison des deux balances entre elles à chaque pression intermédiaire.

Notons enfin que le tube à mercure et le tube de connexion étaient thermostatés à l'aide d'une enveloppe en laiton de 7,5 centimètres de diamètre à circulation d'eau, et que la température était mesurée par des thermomètres disposés le long de ce tube.

BIBLIOGRAPHIE

1. ALTSCHUL M., *Z. phys. Chem.*, 1893, **11**, 583.
2. AMAGAT E. H., *C.R. Acad. Sc. Paris*, 1886, **103**, 429.
3. AMAGAT E. H., *Ann. Chim. Phys.*, 1893, **29**, 68.
4. BASSET J. et J., *Mémorial des Poudres*, 1950, **23**, 319.
5. BEATTIE J. A. et BRIDGEMAN O. C., *Ann. Phys.*, 1932, **12**, 827.
6. BEATTIE J. A. et EDEL W. L., *Ann. Phys.*, 1931, **11**, 633.
7. BRIDGMAN P. W., *Proc. Am. Acad.*, 1909, **44**, 201.
8. BRIDGMAN P. W., *Proc. Am. Acad.*, 1911, **47**, 319.
9. CAILLETET L., *Ann. Chim. Phys.*, 1880, **19**, 386.
10. CROMMELIN C. et SMID G., *Ver. Kon. Ak. Amsterdam*, 1915, 14.
11. DESGOFFE M., *Dingler's Polytechn. J.*, 1871, **202**, 393.
12. HOLBORN L., *Z. Ver. deut. Ing.*, 1923, **67**, 188.
13. HOLBORN L., *Handbuch der Experimental Physik*, 1, *Akad. Verl.*, Leipzig, 1926.
14. HOLBORN L. et BAUMANN A., *Ann. Phys.*, 1910, **31**, 945.
15. HOLBORN L. et SCHULTZE H., *Ann. Phys.*, 1915, **47**, 1089.
16. KEYES F. G., *Mech. Eng.*, 1927, **49**, 163.
17. KEYES F. G., *Proc. Am. Acad.*, 1932, **68**, 529.
18. KEYES F. G. et BROWNLEE R. B., *J. Am. Chem. Soc.*, 1918, **40**, 25.
19. KEYES F. G. et DEWEY J., *J. Optic. Soc. Am.*, 1927, 14, 491.
20. KLEIN G., *Dissertation*, Berlin, 1908; Article abrégé : *Z. Ver. deut. Ing.*, 1910, **54**, 991.
21. MEYERS C. H. et JESSUP R. S., *U.S. Bureau of Standards J. of Research*, 1931, **6**, 1061.
22. MICHELS A., *Ann. Physik*, 1923, **72**, 285.
23. MICHELS A., *Ann. Physik*, 1924, **73**, 577.
24. MICHELS A., *Proc. Kon. Ak. Amsterdam.*, 1932, **35**, 994.
25. RUCHOLZ W., *Dingler's Polytechn. J.*, 1883, **247**, 21.
26. SOMMERFELD A., *Zeitsch. f. Math. u. Physik.*, 1914; *Archiv für Electrotechnik*, 1914.
27. STUCKRATH R., *Z. Instrumentek.*, 1894, **14**, 307.
28. VIEILLE P., *Mémorial des Poudres et Salpêtres*, 1894, **5**, 96.
29. WIEBE H. F., *Z. Kompr. fluss. Gase Pressluft Ind.*, 1897, **1**, 8, 25, 81, 101.
30. WIEBE H. F., *Z. Kompr. fluss. Gase Pressluft Ind.*, 1910, **13**, 83.
31. X., *Engineering*, 1903, **75**, 31.

TABLE DES MATIÈRES

	Pages.
AVANT-PROPOS.....	894
LISTE DES SYMBOLES.....	895
INTRODUCTION.....	896
CHAPITRE PREMIER. — <i>Principes. Historique</i>	898
CHAPITRE II. — <i>Théorie de la balance manométrique</i>	902
§ 1. Généralités.....	902
§ 2. La reproductibilité. Foces de frottement.....	906
§ 3. Détermination de la section effective du piston.....	923
§ 4. Dispositif de repérage d'équilibre.....	937
§ 5. Quelques types de balances manométriques.....	938
ANNEXE. — <i>Étalonnage</i>	942
§ 1. Précision de la méthode.....	942
§ 2. Appareillage.....	943
BIBLIOGRAPHIE.....	946